Аналитичка геометрија

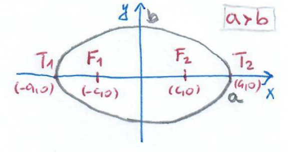
Предавање 4

Ексцентрицитет конусних пресека и класификација квадратних кривих

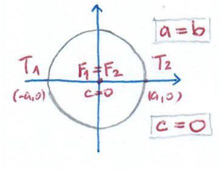
Нови Сад, 2022.

Ексцентрицитет конусних пресека

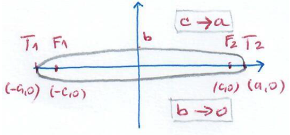
Посматрајмо елипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b > 0$ (односно, $x-$оса је фокална оса);



- фокуси су дати са $F_{1,2}(\pm c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $a > c > 0$;
- темена су $T_{1,2}(\pm a, 0)$
- $\frac{c}{a} \in (0,1)$



- Ако је $c = 0$, односно $F_1 = F_2$, онда је $a = b$ и добијамо *кружницу*
- $\frac{c}{a} = 0$



- Ако $c \to a$, односно $F_i \to T_i,\ i = 1,2$ онда $b \to 0$, те елипса тежи ка *дужи* T_1T_2
- $\frac{c}{a} \to 1$

Ексцентрицитет елипсе

Ексцентрицитет елипсе

је број e који се добија као количник удаљености фокуса и удаљености темена, односно

ако је дата елипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b$ онда је

$$e=\frac{\text{удаљеност фокуса}}{\text{удаљеност темена}}=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

Напомена:

- Код праве елипсе је $0<c<a$, те је ексцентрицитет $0<e<1$
- Ако је $e=0$, онда је $c=0$, односно $a=b$, па добијамо кружницу
- Када $e\to 1$, односно $b\to 0$, елипса се све више издужује ка дужи T_1T_2

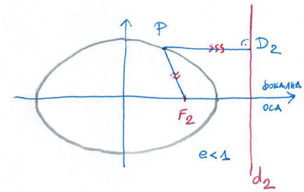
Пример 4.1 Одредити ексцентрицитет путање Халејеве комете ако се зна да се креће по путањи облика елипсе 36,18 астрономских јединица дужине и 9,12 астрономски јединица ширине

Ексцентрицитет елипсе

Директрисе елипсе

су праве d_1 и d_2 нормалне на фокалну (велику) осу елипсе такве да за сваку тачку P са елипсе важи

$$d(P, F_1) = e \cdot d(P, D_1), \quad \text{односно}$$
$$d(P, F_2) = e \cdot d(P, D_2),$$

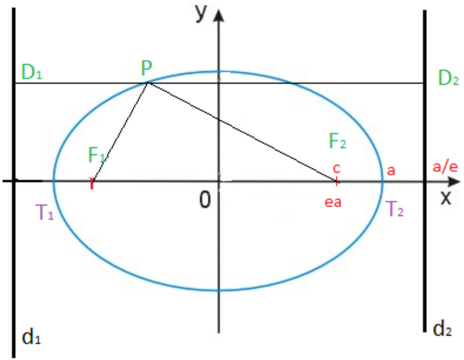


где су F_1, F_2 фокуси елипсе, а D_1, D_2 пројекције тачке P на директрисе d_1 и d_2, редом

Пример 4.2 Показати да су за елипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b$ одговарајуће директрисе праве облика

$$x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

Ексцентрицитет елипсе



односи фокуса, темена и директриса елипсе

Desmos ... елипса

Ексцентрицитет хиперболе

Ексцентрицитет хиперболе

је број e који се добија као количник удаљености фокуса и удаљености темена, односно

ако је дата хипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ онда је

$$e = \frac{\text{удаљеност фокуса}}{\text{удаљеност темена}} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

Напомена:

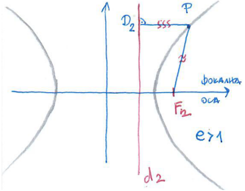
- Код праве хиперболе је $c > a$, те је ексцентрицитет $e > 1$
- када $e \to \infty$, онда $c \to \infty$, односно $b \to \infty$, па хипербола тежи ка две паралелне праве $x = \pm a$
- када $e \to 1$, онда $c \to a$, односно $b \to 0$, па хипербола тежи ка две полуправе "$pp(-\infty, T_1)$" и "$pp(T_2, \infty)$"

Ексцентрицитет хиперболе

Директрисе хиперболе

су праве d_1 и d_2 нормалне на фокалну осу хиперболе такве да за сваку тачку P са хиперболе важи

$$d(P, F_1) = e \cdot d(P, D_1), \quad \text{односно}$$
$$d(P, F_2) = e \cdot d(P, D_2),$$



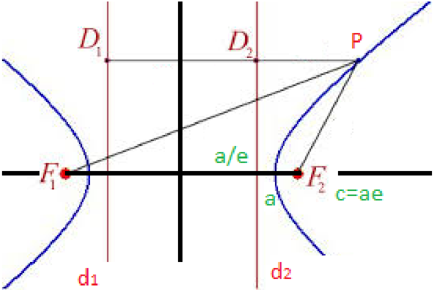
где су F_1, F_2 фокуси хиперболе, а D_1, D_2 пројекције тачке P на директрисе d_1 и d_2, редом

Пример 4.3 Показати да су за хиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ директрисе праве $x = \pm\frac{a}{e}$

Пример 4.4 Одредити темена конусног пресека чији је ексцентрицитет 0,8 а фокуси му леже у тачкама $(0, \pm 7)$

Пример 4.5 Одредити једначину центрираног конусног пресека чији је један фокус $(3, 0)$ а права $x = 1$ му је одговарајућа директриса

Ексцентрицитет хиперболе



односи фокуса, темена и директриса хиперболе

Desmos ... хипербола

Ексцентрицитет параболе. Класификација у односу на e

Ексцентрицитет параболе

je број 1

Наиме, параболу смо баш и дефинисали као скуп тачака P таквих да им је удаљеност од фокуса F једнака удаљености од директрисе d
$d(P,F) = 1 \cdot d(P,D)$, где је D пројекција тачке P на директрису d
* приметимо да код параболе постоји само један пар (F,d)

Класификација конусних пресека у односу на ексцентрицитет e, $e \geq 0$:
однос удаљености тачке од фокуса и директрисе: $d(P,F) = e \cdot d(P,D)$

- $e < 1 \longmapsto$ елипса (специјално, $e = 0$ кружница – нема директрису)
- $e = 1 \longmapsto$ парабола
- $e > 1 \longmapsto$ хипербола

Напомена. Ексцентрицитет се може увести и строго геометријски, употребом конуса, равни и Данделинове сфере, погледати видео на линку.

Квадратне криве

Квадратне криве у равни су решења (x, y) (бесконачан скуп решења) квадратне једначине

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad \text{где } A, B, C \text{ нису сви једнаки } 0$$

- сви конусни пресеци имају канонске једначине овог облика
  * парабола ... $y = \frac{1}{4c}x^2$, односно $x^2 - 4cy = 0$
  * елипса ... $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, односно $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$
  * хипербола ... $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, односно $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$
- линеарни члан $Dx + Ey + F$ се формира транслацијом
  * нпр. кружница са центром у $C(h, k) : (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ постаје

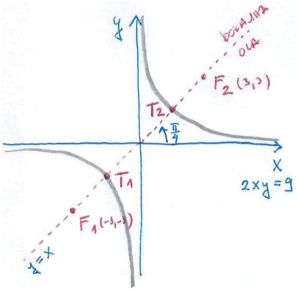
$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

- новина је мешовити члан Bxy

Мешовити члан Bxy

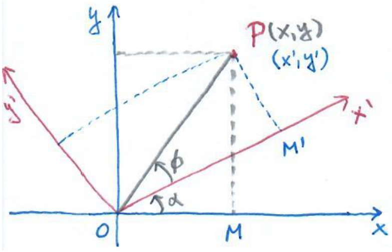
Пример 4.6 Одредити једначину хиперболе са фокусима $F_1(-3,-3)$ и $F_2(3,3)$, ако је разлика удаљености тачке од фокуса $2a = 6$

Из дефиниције, за тачку $P(x,y)$ са хиперболе важи $d(P,F_1) - d(P,F_2) = \pm 6$ односно, $\sqrt{(x+3)^2 + (y+3)^2} - \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} = \pm 6$,
што после сређивања израза постаје $2xy = 9$



- фокуси су $F_1(-3,-3)$ и $F_2(3,3)$ дакле, фокална оса је $x = y$ (под углом $\pi/4$ у односу на $x-$осу)
- темена су $T_1(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$ и $T_2(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$
- асимптоте су $x-$ и $y-$оса

Ротација правоуглог координатног система



Тачка P прво има координате $P(x, y)$
након ротације к.с. за α постаје $P(x', y')$

$$x = OM = OP\cos(\alpha+\phi)$$
$$= OP\cos\phi\cos\alpha - OP\sin\phi\sin\alpha$$
$$y = MP = OP\sin(\alpha+\phi)$$
$$= OP\cos\phi\sin\alpha + OP\sin\phi\cos\alpha$$

ако користимо додатно и

$$x' = OM' = OP\cos\phi$$
$$y' = PM' = OP\sin\phi$$

добијамо формуле за прелазак из једног координатног система у други

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}}$$

Пример 4.7 Одредити једначину хиперболе $2xy = 9$ у координатном систему $x'y'$, који настаје ротирањем првобитног $xy-$координатног система за угао $\frac{\pi}{4}$

Ротација правоуглог координатног система

Након ротације $xy-$координатног система за угао α у новодобијеном к.с. $x'y'$, почетна квадратна једначина је опет облика

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0, \quad \text{где je}$$

$$\begin{aligned}
A' &= A\cos^2\alpha + B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha \\
B' &= B\cos 2\alpha + (C - A)\sin 2\alpha \\
C' &= A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha \\
D' &= D\cos\alpha + E\sin\alpha \\
E' &= -D\sin\alpha + E\cos\alpha \\
F' &= F
\end{aligned}$$

Дакле, да би нестао мешовити члан $B'x'y'$ потребно је ротирати $xy-$координатни систем за угао α тако да

$$B' = B\cos 2\alpha + (C - A)\sin 2\alpha = 0, \quad \text{односно}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{B}{A - C} \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{B}}$$

Класификација квадратних кривих

Нека је $xy-$координатни систем постављен тако да квадратна једначина нема мешовити члана Bxy, односно да је облика

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Тада знамо да је одговарајућа **квадратна крива**
(имајући у виду и евентуалне транслације у равни)

- $A = C \neq 0$ *кружница* (спец. тачка или празан скуп)
- $A = 0 \wedge D \neq 0$ или $C = 0 \wedge E \neq 0$ *парабола*
- $AC > 0$ *елипса* (спец. кружница, тачка или празан скуп)
- $AC < 0$ *хипербола* (спец. две праве које се секу)
- $A = C = 0$ и $D, E \neq 0$ *права*
- ако можемо да факторишемо квадратни полином као производ два линеарна полинома, онда добијамо *две праве* (или једну ако се поклапају)
  нпр. $(x + ay + b)(x - ay + c) = x^2 - a^2y^2 + (b + c)x + a(c - b)y + bc = 0$
- могу да се добију и две паралелне праве, на пример за $AF < 0$ и $C, D, E = 0$

Класификација квадратних кривих

Пример 4.8 Показати да важи $B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'$

Користећи ову чињеницу добијамо **тест дискриминанте** за општи облик једначине

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

- *парабола*: $B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C' = -4A'C' = 0$
- *елипса*: $B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C' = -4A'C' < 0$
- *хипербола*: $B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C' = -4A'C' > 0$
  наравно, могући су и сви спомињани специјални случајеви

Пример 4.9 Одредити који конусни пресеци су дати наредним једначинама

- $3x^2 - 6xy + 3y^2 + 2x - 7 = 0$ парабола
- $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ елипса
- $xy - y^2 - 5y + 1 = 0$ хипербола