Аналитичка геометрија

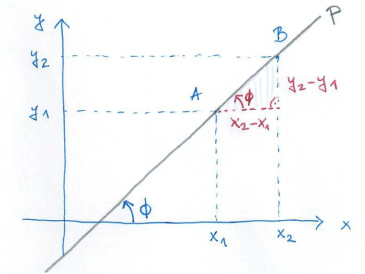
Предавање 2

Једначине праве у равни и међусобни положај правих у равни

Нови Сад, 2022.

Коефицијент правца праве

Ако су у равни дате две тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, онда знамо да увек постоји *тачно једна права p* која пролази кроз те две дате тачке A и B.



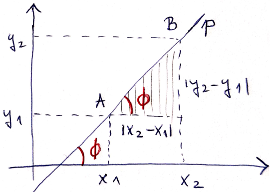
$\phi \ldots$ угао који права p гради са позитивним делом $x-$осе и то у смеру обрнутом од казаљке на сату. Дакле, важи $0 \leq \phi < \pi$.

коефицијент правца праве $p = p(A, B)$ је $k = \operatorname{tg} \phi = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Приметимо:

- k се може израчунати за $\phi \neq \pi/2$;
- пресликавање $\phi \mapsto k = \operatorname{tg}\phi$ је бијективно на $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$.
- строго говорећи, ако за одређивање коефицијента правца k користимо тригонометрију правоуглог троугла, ситуација је следећа:

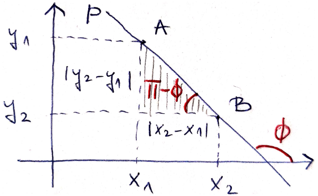
$\phi \in [0, \pi/2) \Rightarrow k \geq 0$



$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad y_1 \leq y_2$ или обрнуто

$$k = \operatorname{tg}\phi = \frac{|y_2 - y_1|}{|x_2 - x_1|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$\phi \in (\pi/2, \pi) \Rightarrow k < 0$



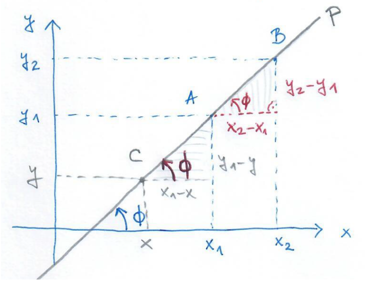
$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad y_1 \geq y_2$ или обрнуто

$$k = \operatorname{tg}\phi = -\operatorname{tg}(\pi - \phi) = -\frac{|y_2 - y_1|}{|x_2 - x_1|}$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Коефицијент правца праве

Сада, **свакој прави** $p = p(A, B)$, на којој познајемо две тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, можемо **придружити број** $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, *коефицијент правца* праве p.
Овакво придруживање је добро дефинисано, јер ако k израчунавамо путем било ког другог пара тачака са праве p, нпр. $A(x_1, y_1)$ и $C(x, y)$, он остаје исти



$$\color{red}{\mathrm{tg}\,\phi =} k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \qquad (1)$$

Дакле, коефицијент правца k праве p, ако се рачуна путем координата тачака са праве, не зависи од избора самих тачака (сада, A и B)

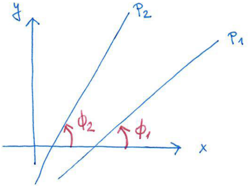
Напомене:

1. Приметимо да није важан редослед тачака A и B при рачунању коефицијента правца k праве $p = p(A, B) = p(B, A)$

$$k = \operatorname{tg}\phi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

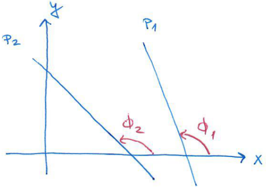
2. Знак коефицијента правца k

$\phi \in [0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow k \geq 0$



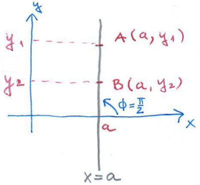
"растуће праве-- кад расте x расте и y

$\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow k < 0$



"опадајуће праве-- кад расте x опада y

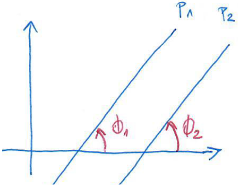
3. За праве паралелне са $y-$осом, праве облика $x = a$, не може да се израчуна коефицијент правца



$$\phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow k = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \notin \mathbb{R}$$

праве облика $x = a$

4. Паралелне праве имају исти коефицијент правца



ϕ_1 и ϕ_2 су углови са паралелним крацима

$$\phi_1 = \phi_2 \Rightarrow k_1 = \operatorname{tg} \phi_1 = \operatorname{tg} \phi_2 = k_2$$

Једначине праве у равни

Једначина праве кроз две тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$

за произвољну тачку $T(x, y)$ са праве $p = p(A, B)$, на основу (1) важи

$$k = \operatorname{tg} \phi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

Пример 2.1 Одредити једначину праве кроз тачке $A(1, 1)$ и $B(3, 5)$

Једначина праве са коефицијентом правца k кроз тачку $A(x_1, y_1)$

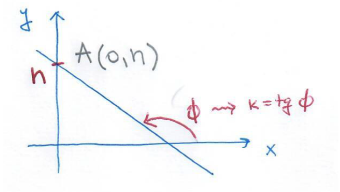
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = y_1 + k(x - x_1)}$$

Пример 2.2 Одредити једначину праве са коефицијентом правца $k = -3$ кроз тачку $A(1, 2)$

Једначине праве у равни

Експлицитни облик једначине праве

права са коефицијентом правца k која сече $y-$осу у n (односно пролази кроз тачку $A(0, n)$)



$$y = n + k(x - 0)$$

$$\boxed{y = kx + n}$$

Пример 2.3 Одредити једначину праве ако јој је коефицијент правца $k = -2$ и сече $y - osu$ у $n = 3$; затим је нацртати

Једначине праве у равни

Имплицитни (општи) облик једначине праве

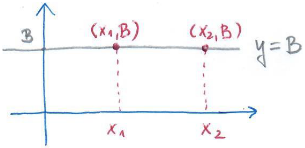
$ax + by + c = 0,$ где a и b нису истовремено једнаки нули

Напомене:

1. Општи облик једначине праве укључује и праве облика $x = A$
(нпр. за $a = 1, b = 0$ и $c = -A$)
2. Општи облик једначине праве није јединствен!

$$ax + by + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha ax + \alpha by + \alpha c = 0, \ \alpha \neq 0$$

3. Сви облици једначине праве, до сад, укључују праве облика $y = B$

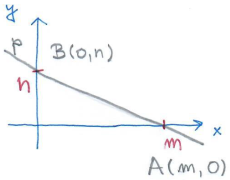


- $0x + 1y - B = 0$
- $y_1 = y_2 = B \Rightarrow k = 0$ и $\phi = 0$
  $y = 0x + B$

Једначине праве у равни

Сегментни облик једначине праве

права која сече $x-$осу у m и $y-$осу у n, тако да $m, n \neq 0$



- није облика $y = B$, јер сече $x-$осу
- није облика $x = A$, јер сече $y-$осу
- не пролази кроз $(0,0)$, јер је $m, n \neq 0$

Дакле, како права p пролази кроз $A(m,0)$ и $B(0,n)$ добијамо

$$y = 0 + \frac{n-0}{0-m}(x-m) \Rightarrow y = -\frac{n}{m}x + n \quad / : n$$

$$\boxed{\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1, \quad m, n \neq 0}$$

Једначине праве у равни

Пример 2.4 Одредити једначину праве која сече $x-$осу у 4, а $y - osu$ сече у -1; затим је и нацртати

Пример 2.5 Одредити у каквом су међусобном односу коефицијенти k, n експлицитног облика једначине праве са коефицијентима a, b, c имплицитног, затим и m, n сегментног облика једначине праве

Међусобни положај правих у равни

Геометријски посматрано, праве у равни могу да се:

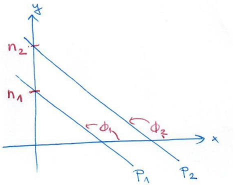
1. поклапају
2. не секу – *паралелне*
3. секу

1. праве се поклапају
- експлицитни и сегментни облик једначине праве има јединствен запис, те се ту јасно види да је иста права у питању
- имплицитни облик једначине праве нема јединствен запис, па треба приметити да су $ax + by + c = 0$ и $\alpha ax + \alpha by + \alpha c = 0$, $\alpha \neq 0$ различити записи исте праве

Међусобни положај правих у равни

2. праве су паралелне

најлакше се види ако је једначина праве дата у *експлицитном* облику; те је увек практично прво превести једначину у тај облик

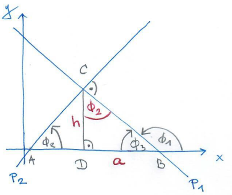


- $\phi_1 = \phi_2 \;\Rightarrow\; \boxed{k_1 = k_2 = k}$
- $p_1 : \; y = kx + n_1$
- $p_2 : \; y = kx + n_2$

Пример 2.6 Проверити да ли су праве $y = 3x + 2$ и $6x - 2y + 7 = 0$ паралелне

Међусобни положај правих у равни

3.a праве су нормалне – ортогоналне



- $p_1 : \ y = k_1 x + n_1, \ k_1 = \mathrm{tg}\ \phi_1$
- $p_2 : \ y = k_2 x + n_2, \ k_2 = \mathrm{tg}\ \phi_2$
- без умањења општости претпоставили смо да је $\phi_1 > \frac{\pi}{2}$ и $\phi_2 < \frac{\pi}{2}$; заиста $\phi_1 + \phi_3 = \pi$ и $\phi_2 + \phi_3 = \pi/2$, па је $\phi_1 - \phi_2 = \pi/2$

из сличности троуглова $\triangle ABC$ и $\triangle CBD$ добијамо да је $\measuredangle DCB = \phi_2$; те посматрајући троугао $\triangle BCD$ имамо

$k_1 = \mathrm{tg}\ \phi_1 = -\mathrm{tg}\ \phi_3 = -\frac{h}{a}$

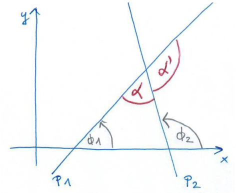
$k_1 \cdot k_2 = \mathrm{tg}\ \phi_1 \cdot \mathrm{tg}\ \phi_2 = -\frac{h}{a} \cdot \frac{a}{h} = -1$

$$\boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}}$$

Пример 2.7 Одредити једначину праве која је нормална на праву $y = x + 1$ и пролази кроз тачку $A(1, 1)$

Међусобни положај правих у равни

3.б праве се секу под углом α



- $p_1 : \; y = k_1 x + n_1, \; k_1 = \operatorname{tg} \phi_1$
- $p_2 : \; y = k_2 x + n_2, \; k_2 = \operatorname{tg} \phi_2$
- без умањења општости претпоставили смо да је $\phi_1 + \alpha = \phi_2$

користећи тригонометријске формуле добијамо

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\phi_2 - \phi_1) = \frac{\operatorname{tg} \phi_2 - \operatorname{tg} \phi_1}{1 + \operatorname{tg} \phi_1 \cdot \operatorname{tg} \phi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

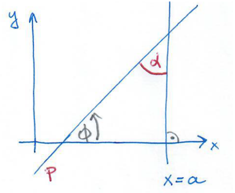
$$\boxed{\alpha = \operatorname{arctg} \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}}$$

Напомена: Имајући у виду да је $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \alpha'$ можемо користити формулу $\alpha = \operatorname{arctg} \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$ уз претпоставку да је α оштар угао

Међусобни положај правих у равни

Напомена: Како смо користили експлицитни облик једначине праве, праве облика $x = a$ нису узимане у обзир, те приметимо додатно
1. права паралелна правој $x = a$ је опет права облика $x = a'$
2. права нормална на праву $x = a$ је права $y = b$; и обрнуто
3. углао између праве $x = a$ и праве $y = kx + n,\ k = \operatorname{tg} \phi$ је

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \operatorname{ctg} \phi = \frac{1}{\operatorname{tg} \phi} = \frac{1}{k}$$



Пример 2.8 Анализом система алгебарских једначина $y = k_1 x + n_1$ и $y = k_2 x + n_2$, одредити у каквом су међусобном односу одговарајуће праве