Комплексна анализа - вежбе

Милица Жигић, Аника Њамцул, Стефан Тутић

30. септембар 2022.

1 Поље комплексних бројева (1. и 2. вежбе)

1. Доказати: (а) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$; (б) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; (ц) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$; (д) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

2. * Опишите скуп тачака z у комплексној равни који задовољава:
(а) $|z-1| + |z+1| = 7$; (б) $|z| = 3|z-1.|$

3. Одредити реални имагинарни део следећих комплексних бројева: (а) $z = \frac{1+i}{1-i}$; (б) $z = \frac{2i}{3+i}$.

4. * Следеће комплексне бројеве нацртати у комплексној равни и претворити их у тригонометријски и екпоненцијални облик: (а) $z = 1 - i$; (б) $-1 + \sqrt{3}i$; (ц) $z = \sqrt{3} + i$.

5. * За комплексне бројеве из претходног задатка израчунати $\frac{1}{z}$, а затим нацртати добијене вредности у комплексој равни и претворити их у тригонометријски и експоненцијални облик.

6. Израчунати: (а) $z = \sqrt[5]{1}$; (б) $z = \sqrt[4]{-1}$; (ц) $z = (1 + i\sqrt{3})^{33}$; (д) $z = \sqrt[5]{-2+2i}$.

7. Доказати да $\sqrt[4]{i}$ има следеће вредности:
$$\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right), \qquad \pm\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right).$$

8. Доказати да за све $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ важи: $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ (правило паралелограма).

9. Доказати идентитет: $|1 - \overline{a}b|^2 - |a - b|^2 = (1 + |ab|)^2 - (|a| + |b|)^2$, за $a, b \in \mathbb{C}$.

10. Доказати да једначина $z \cdot \overline{z} + \overline{A}z + A\overline{z} + B = 0$, где је $A \in \mathbb{C}$, $B \in \mathbb{R}$ одређује круг у комплексној равни.

11. * Доказати користећи геометријске аргументе да ненула комплексни бројеви z_1 и z_2 задовољавају услов $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ ако и само ако имају једнаке аргументе.

12. * Показати да је вектор z_1 паралелан са z_2 ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$) ако и само ако је $\mathrm{Im}(z_1 \cdot \overline{z_2}) = 0$.

13. * Користећи Де Моаврову и биномну формулу доказати идентитет $\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$.

14. Израчунати: $\sin\alpha + \sin(2\alpha) + \cdots + \sin(n\alpha), n \in \mathbb{N}$.

15. Ако је $z \in \mathbb{C}$ нула полинома $P(x)$ са реалним коефицијентима, тада је и $\overline{z}$ нула тог полинома. Доказати.

16. Нека је $z = 2$ и z описује кружницу полупречника 2 око координатног почетка у смеру супротном од казаљке на сату. Колика је промена аргумента $f(z)$ ако је:
(а) $f(z) = \sqrt{z-1}$; (б) $f(z) = \sqrt{z^2-1}$; (ц) $f(z) = \sqrt{z^2+2z-3}$.

2 Аналитичке функције (3. вежбе)

17. Доказати да Коши - Риманове парцијалне диференцијалне једначине у поларним координатама имају следећи облик:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial v}{\partial \rho},$$

ако је $f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$

18. Показати да функција $f(z) = \sqrt{|xy|}$ у тачки $z = 0$ задовољава Коши - Риманове услове, али да у тој тачки не постоји извод.

19. Где је функција $f(z) = z \cdot \Re(z)$ диференцијабилна? Одредити извод функције f. ($\Re(z)$ је ознака за реални део комплексног броја).

20. Одредити област у којој је функција $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$ аналитичка.

21. Показати да за сваку аналитичку функцију важи релација:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(x+iy)|^2 = 4|f'(x+iy)|^2.$$

22. Одредити аналитичку функцију чији је реални део $u(x, y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$ и $f(0) = 0$.

23. Доказати да функција $u(x, y) = \dfrac{\sin(2x)}{\mathrm{ch}(2y) + \cos(2x)}$ може бити реални део неке аналитичке функције. Одредити имагинарни део функције f, а затим изразити експлицитно f као функцију од $z = x + iy$.

24. Наћи аналитичку функцију чији је реални део $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

3 Аналитичке функције (4. вежбе)

25. Одредити аналитичку функцију чији је реални део $u(x, y) = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Постоји ли аналитичка функција чији је реални део $e^{\frac{y}{x}}$?

26. Одредити аналитичку функцију $f(z) = u + iv$ ако је $v = \varphi(x^2 + y^2)$.

27. Ако је f аналитичка у области Д (отворен, повезан скуп) и реални део $f(z)$ (или, аналогно имагинарни део $f(z)$) је константно у Д, тада и $f(z)$ мора бити константно у Д.

28. Показати да ако је $f(z)$ аналитичка и реална у области Д, тада је $f(z)$ константно у Д.

29. Нека су $f(z)$ и $\overline{f(z)}$ аналитичке функције у области Д. Показати да је тада $f(z)$ константно у Д.

30. Нека су функције u и v хармонијске у области Д.
(а) Да ли је њихова сума $u+v$ хармонијска функција у Д?
(б) Да ли је њихов производ $u \cdot v$ хармонијска функција у Д?
(ц) Да ли је $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ хармонијска функција у Д?
Упутство. Може се користити чињеница да хармонијске функције имају непрекидне парцијалне изводе сваког реда.

4 Елементарне функције (5. вежбе)

31. Доказати $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

32. Доказати $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$.

33. Доказати $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$.

34. Доказати следеће једнакости:
(а) $\operatorname{ch} z = \cos(iz)$; (б) $i \operatorname{sh} z = \sin(iz)$; (ц) $\operatorname{ch}(iz) = \cos z$; (д) $\operatorname{sh}(iz) = i \sin(z)$;
(е) $\operatorname{tg}(iz) = i \operatorname{th}(z)$; (ф) $i \operatorname{tg}(z) = \operatorname{th}(iz)$; (г) $\operatorname{ctg}(iz) = -i \operatorname{cth}(z)$; (х) $-i \operatorname{ctg}(z) = \operatorname{cth}(iz)$.

35. Израчунати:
(а) $\operatorname{Ln} 4$; (б) $\operatorname{Ln} i$; (ц) $\ln i$; (д) $\operatorname{Ln}(-5)$; (е) $\operatorname{Ln} \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

36. Израчунати: (а) $1^{\sqrt{2}}$; (б) i^i.

37. Доказати следеће једнакости:
(а) $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2})$; (б) $\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2+1})$;
(ц) $\operatorname{Arctg} z = \dfrac{1}{2i} \operatorname{Ln} \dfrac{i-z}{i+z}$; (д) $\operatorname{Arcctg} z = \dfrac{1}{2i} \operatorname{Ln} \dfrac{z+i}{z-i}$; (е) $\operatorname{Arcsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2+1})$;
(ф) $\operatorname{Arcch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1})$; (г) $\operatorname{Arcth} z = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1+z}{1-z}$; (х) $\operatorname{Arccth} z = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{z+1}{z-1}$.

38. Показати да је $\sin z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ и $\cos z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

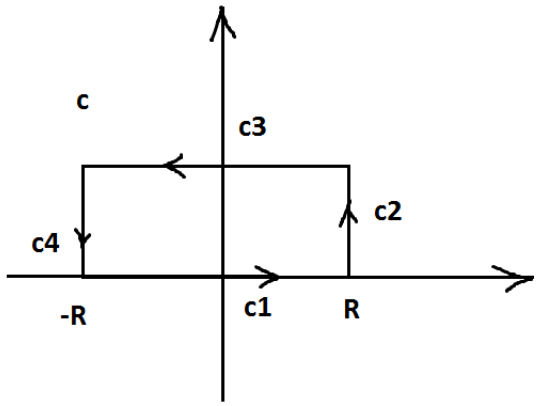
5 Комплексна интеграција (6. и 7. вежбе)

39. Нека је дат комплексан број $z_0 = x_0 + iy_0$ и реалан број $r > 0$. Нека је γ позитивно оријентисана кружница полупречника r са центром у z_0. Одредити $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$, где је $f(z) = (z - z_0)^m$, $m \in \mathbb{Z}$.

40. Израчунати $\displaystyle\int_\gamma e^z dz$, где је γ део праве од 1 до $1 + \dfrac{\pi}{2}$.

41. Без рачунања интеграла проверити процену $\left\| \displaystyle\int_\gamma \frac{z+1}{z-1} dz \right\| \leqslant 8\pi$, где је $\gamma : |z-1| = 2$.

42. Показати да је $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$, $b \in \mathbb{R}$. Упутство: интегралити $\int\limits_c e^z\, dz$, где је c крива на слици Фигуре 1 и користити да је $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ (Гаусов интеграл).

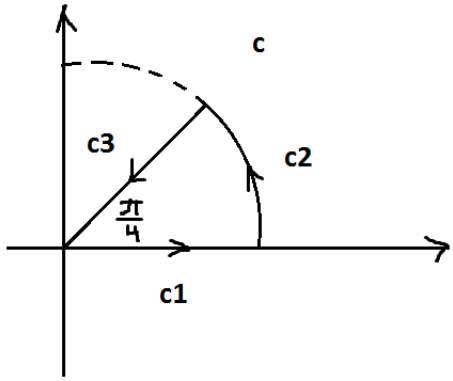


Slika 1: Zadatak 42

43. Израчунати **Френелове интеграле**:

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos(t^2)dt \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{+\infty} \sin(t^2)dt,$$

интегралећи функцију $f(z) = e^{-z^2}$, по контури на слици Фигуре 2.



Slika 2: Zadatak 43

44. Нека је c проста, затворена, позитивно оријентисана контура, а Ω њена унутрашњост. Израчунати: $\int\limits_c \frac{dz}{z^2+9}$ ако је (а) $3i \in \Omega, -3i \notin \Omega$; (б) $3i \notin \Omega, -3i \in \Omega$; (ц) $3i, -3i \in \Omega$.

45. Нека је γ позитивно оријентисана затворена контура, а Ω њена унутрашњост. Израчунати

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz,$$

где је (а) $0 \in \Omega, 1 \notin \Omega$; (б) $0 \notin \Omega, 1 \in \Omega$; (ц) $0, 1 \in \Omega$.

46. Наћи интеграл функције $\dfrac{z^3 - 2z + 1}{z^2 + 1}$ по позитивно оријентисаним кружницама:
(а) $|z - i| = 1$; (б) $|z + i| = 1$; (ц) $|z - 7i| = 1$.

47. Израчунати интеграл $I = \displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2-1)^2} dz$, где је $|z - 1| = 1$ позитивно оријентисана кружница.

48. Израчунати интеграл $I = \displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)} dz$ по позитивно оријентисаној кружници $|z| = 2$.

6 Тејлоров ред (8. вежбе)

49. Нека је $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ конвергентан ред и нека $|\arg c_n| \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, $c_n \in \mathbb{C}$. Показати да тада ред $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ конвергира апсолутно.

50. Нека је $c_n = a_n + ib_n$, $n \in \mathbb{N}$ и $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ такви да је $\Re(c_n) \geqslant 0$ и нека редови $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n, \sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2$ конвергирају. Показати да тада конвергира и ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2$.

51. Дати су редови $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$. Испитати конвергенцију, ако је: (а) $c_n = \dfrac{n}{(2i)^n}$; (б) $c_n = \dfrac{n!}{(ni)^n}$.

52. Одредити полупречник конвергенције следећих редова и и испитати конвергенцију на рубу:
(а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$; (б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$; (ц) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nz^n$; (д) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} z^n$; (е) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (3 + (-1)^n)^n z^n$.

53. Развити у Тејлоров ред око тачке $z_0 = 0$ функције: (а) $f(z) = \operatorname{ch} z$; (б) $f(z) = \sin^2 z$;
(ц) $f(z) = \dfrac{1}{az + b}, a, b \neq 0$; (д) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 4z + 13}$; (е) $f(z) = \displaystyle\int_0^z e^{t^2} dt$.

54. Развити у ред функцију $f(z) = \dfrac{z^3}{(1+z)^4}$ у тачки $z_0 = 0$.

55. Развити у ред функцију $f(z) = \sqrt{z + i}$ у $z_0 = 0$ ако је $\sqrt{i} = e^{\frac{\pi}{4} i}$.

56. Развити функцију $f(z) = \operatorname{Arctg} z$ у Тејлоров ред у тачки $z_0 = 0$.

57. Написати Тејлоров ред функције $f(z) = \dfrac{1}{1 + z^2}$ на кружници $|z - 1| < \sqrt{2}$.

58. Функцију $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{\ln z}$ развити у Тејлоров ред, ако је то могуће, у околини тачке $z_0 = 0$.

7 Сингуларитети функције; Лоранови редови (9. вежбе)

59. Развити функцију $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ (ако је $|a| \leqslant |b|$) у Лоранов ред у $z_0 = 0$ ако:

    (а) $|z| < |a|$; (б) $|a| < |z| < |b|$; (ц) $|z| > |b|$.

60. Испитати карактер сингуларних тачака следећих функција:

    (а) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^5}$; (б) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$; (ц) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

61. Да ли је у околини $z_0 = 0$ могуће следеће функције развити у Лоранов ред:

    (а) $f(z) = \sin \dfrac{1}{z}$; (б) $f(z) = \dfrac{1}{\sin \frac{1}{z}}$.

62. Испитати карактер сингуларних тачака следећих функција:

    (а) $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z}$; (б) $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$; (ц) $f(z) = \dfrac{1}{z^3(1-z)}$; (д) $f(z) = \operatorname{th} \dfrac{1}{z}$;

    (е) $f(z) = \dfrac{1+\sqrt{1-z^2}}{z^3(z+1)} \operatorname{Arcth} z$; (ф) $f(z) = \dfrac{\sqrt{z^3 - 3z^2}}{\sin z^4} \operatorname{Arcth} z$.

63. Написати Лоранов развој обе гране функције $f(z) = \dfrac{z - 1 + 2\sqrt{z-2}}{(z-3)^3}$ у прстену $0 < |z-3| < 1$.

64. Развити функцију $f(z) = \sqrt{\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}}$ у Лоранов ред у прстену $1 < |z| < 2$ за ону грану за коју је $\Im f(\dfrac{3}{2}) > 0$.

65. Развити функцију $f(z) = \cos \dfrac{z}{1-z}$ у ред у околини тачке $z = 1$.

66. Развити функцију $f(z) = \cos \dfrac{z}{1-z}$ у ред у околини тачке $z = \infty$.

67. Развити функцију $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$ у Лоранов ред у околини тачке $z = 0$.

68. Одредити тачке гранања следећих функција:

    (а) $f(z) = \sqrt[3]{z(z-1)}$; (б) $f(z) = \sqrt[5]{\dfrac{z}{z-1}}$; (ц) $f(z) = \sqrt{z} + \sqrt{z-1}$.

69. Дата је функција $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2(z+1)}$.

    (а) Испитати карактер сингуларитета функције f (укључујући и $z = \infty$).

    (б) Развити функцију у Лоранов ред око сваког сингуларитета око којег је то могуће и одредити резидууме.

8 Резидуум функције у изолованом сингуларитету (10. вежбе)

70. Дата је функција $f(z) = \dfrac{\sin z^2}{z^2(z - \frac{\pi}{4})}$. Одредити резидуум функције f у тачки 0 и у $\frac{\pi}{4}$.

71. Одредити $I = \int\limits_{|z|=55} \frac{zdz}{(z-1)(z-2)^3}$.

72. Израчунати: (а) $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \sin\frac{1}{z}dz$; (б) $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \sin^2\frac{1}{z}dz$.

73. Израчунати: $\int\limits_{|z|=3} \frac{dz}{\sin^5 z}$ и $\int\limits_{|z|=3} \frac{dz}{\sin^6 z}$.

74. Дата је функција $f(z) = \frac{e^z(z-1)+1}{z^k(z-1)}$.
(а) Одредити k тако да тачка $z = 0$ буде пол 3. реда.
(б) За тако одређено k израчунати $\int\limits_{|z-\frac{1}{2}|=1} f(z)dz$.

75. Нека је Γ позитивно оријентисана кружница $|z| = 3$. Доказати да је тада

$$I = \int\limits_{\Gamma} \frac{e^{zt}dz}{z^2(z^2+2z+2)} = \pi i(t - 1 + e^{-t}\cos t).$$

76. Израчунат интеграл $I = \int\limits_{\Gamma} \frac{(z-1)^n}{z^n-1}dz$, где је $n \in \mathbb{N}, n > 1$, где је Γ позитивно оријентисана кружница $|z| = R > 1$.

9 Примена рачуна остатака на решавање реалних интеграла (11. вежбе)

77. Израчунати интеграл $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+b\cos t)^2}$, $a > b > 0$.

78. Израчунати интеграл $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos t)^n \cos(nt)}{1-a-2a\cos t}dt$, где је $-1 < a < \frac{1}{3}$.

79. Израчунати интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

80. Израчунати интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$.

81. Доказати да је $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = \frac{\pi}{a^2-b^2}\left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right)$, ако је $a, b > 0$ и $a \neq b$.

82. Израчунати интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch}(\pi x)} dx$, где је $-\pi < a < \pi$.

83. Израчунати $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x(x^2+b^2)} dx$, где је $a > 0, b > 0$.

84. Ако је $-\pi < a < \pi$ доказати да је $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(ax)}{\operatorname{sh}(\pi x)} dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{a}{2}$.

85. Доказати да је $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x} dx = \frac{-\pi}{\sin(\alpha\pi)}$ за $-1 < \alpha < 0$.

86. Израчунати $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx$ при чему је $a \in \mathbb{R}^+$.

10 Рушеова теорема и принцип аргумента (12. вежбе)

87. Колико се нула датих функција налази унутар круга $|z| < 1$?
(а) $f(z) = 2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8$; (б) $f(z) = z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$.

88. Колико решења има једначина $z^4 - 5z + 1 = 0$ у
(а) јединичном кругу $|z| < 1$; (б) у прстену $1 < |z| < 2$?

89. Колико решења има једначина $e^z - 4z^n + 1 = 0$ у јединичном кругу $|z| < 1$?

90. Колико решења у кругу $|z| < R$ има једначина $e^z = az^n$, $n \in \mathbb{N}$ ако се зна да је $|a| > \frac{e^R}{R^n}$?

91. Доказати да једначина $z = \lambda - e^{-z}$, $\lambda > 1$, има у десној полуравни јединствено реалнно решење.

92. Одредити број нула полинома $f(z) = z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 4z + 1$ у десној полуравни.

93. Одредити број нула полинома $f(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2$ по квадрантима.

94. Колико нула има полином $P(z) = z^4 - 4z^3 + 11z^2 - 14z + 55$
(а) у првом квадранту; (б) у траци $2 < \operatorname{Re}(z) < 3$.