Комплексна анализа - вежбе

Милица Жигић, Аника Њамцул и Стефан Тутић

30. септембар 2022.

1 Комплексне функције

1. Да ли за све $a, b \in \mathbb{C}$ важи: $|a|^{|b|} = \left|a^b\right|$? Одговор детаљно образложити.
2. Израчунати e^{z_0}, где је $z_0 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{603}$.
3. Описати скуп тачака z у комплексној равни који задовољава услов: $|z| = 3|z-1|$.
4. Одредити скуп тачака z у комплексној равни $\mathbb{C}$ за које важи: $0 < \arg\left(\frac{z-i}{z+i}\right) \leqslant \frac{\pi}{4},\ z \neq i$.
5. Решити једначину: $z^2 - 2z + (1+2i) = 0$.
6. Ако је $z = \sqrt[3]{1},\ z \neq 1$, тада је $2z^4 + z^3 + 2z^2 + 1 = 0$. Доказати.
7. За које $z \in \mathbb{C}$ важи једнакост $\overline{(e^{iz})} = e^{i(\overline{z})}$?
8. Решити једначину $\sin z = i$.
9. Доказати: $\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$.
10. Показати да за $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ важи $\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$.
11. Одредити сва решења једначине $\bar{z} = z^{n-1}$, где је n природан број већи од 2.
12. Показати да је реални део свих решења једначине $(z+1)^{28} = (z-1)^{28}$ једнак нули.
13. Да ли низ $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира? Образложити одговор.
14. Одредити сва комплексна решења $e^{z^2} = 1$.

2 Аналитичке функције

15. Дата је функција

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{z}^3}{z^2}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

   (а) Показати да комплексни извод $f'(0)$ не постоји.

   (б) Показати да функција f није диференцијабилна ни у једној тачки комплексне равни.

16. Одредити извод главне гране функције z^{1+i} у тачки $z_0 = i$.

17. Испитати непрекидност и диференцијабилност комплексне функције $f(z) = z\,\mathrm{Re}(z),\ z \in \mathbb{C}$.

18. Одредити грану вишезначне функције $f(z) = \mathrm{Ln}(z^2+1)$ која је аналитичка у $z = 0$ и једнака $2\pi i$. Одредити $f'(z)$.

19. Где функција $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ дата са $f(z) = z\overline{z} + \dfrac{z}{\overline{z}}$ задовољава Коши - Риманове једначине?

    Напомена: Могу се користити Коши - Риманове једначине у поларним координатама.

20. Одредити аналитичку функцију $f = u + iv$ и изразити је експлицитно као функцију од $z = x + iy$, ако је познато да јој је реални део хармонијска функција $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 1$.

21. Доказати да је реална функција $u(x,y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 2x^2 - 2y^2 + 1,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ хармонијска функција која може бити реални део неке аналитичке функције f. Наћи f и изразити је експлицитно као функцију од $z = x + iy$. Затим одредити $f'(z),\ z \in \mathbb{C}$.

22. Доказати да реална функција $u(x,y) = e^{cy}\cos x,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, може бити реални део неке аналитичке функције само за две вредности параметра $c \in \mathbb{R}$. За те вредности параметра c, изразити добијену комплексну аналитичку функцију f као функцију од $z = x + iy$.

23. Доказати да реална функција $u(x,y) = 2^x\cos(y\ln 2),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ може бити реални део комплексне аналитичке функције f. Одредити функцију f ако је $f(0) = 1$ и изразити је експлицитно као функцију од $z = x + iy$. Одредити $f^{'}(z)$.

24. Доказати да функција $u(x,y) = x\cos x\,\mathrm{ch}\,y + y\sin x\,\mathrm{sh}\,y$ може бити реални део аналитичке функције f. Одредити функцију f ако је $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$ и изразити је експлицитно као функцију од $z = x + iy$. Одредити $f^{'}(z)$.

25. Одредити константе $a, b \in \mathbb{R}$ тако да функција

$$f(z) = f(x+iy) = \cos x\,(\mathrm{ch}\,y + a\,\mathrm{sh}\,y) + i\sin x\,(\mathrm{ch}\,y + b\,\mathrm{sh}\,y)$$

    буде аналитичка на $\mathbb{C}$ (цела).

26. Показати да је функција

$$f(z) = f(x+iy) = e^{x^2-y^2}\Big(\cos(2xy) + i\sin(2xy)\Big)$$

    цела и наћи њен извод.

27. Одредити аналитичку комплексну функцију $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ чији је реални део $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$; одредити и домен аналитичности функције f, D_f. Одредити $f'(z)$, $z \in D_f$.

Напомена. Може се користити да је $\displaystyle\int \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}\, da = -\frac{a}{a^2+b^2} + const.$

28. Доказати да функција $v(x,y) = y\cos x \operatorname{ch} y - x \sin x \operatorname{sh} y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ може бити имагинарни део неке аналитичке функције f; одредити ту комплексну функцију f и изразити је експлицитно као функцију од $z = x+iy$.

29. Доказати да $v(x,y) = (y\cos y + x \sin y)e^x$ може бити имагинарни део неке аналитичке функције f. Наћи f и изразити је експлицитно као функцију од $z = x+iy$.

30. Доказати да $v(x,y) = xy - \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ може бити имагинарни део неке аналитичке функције f. Наћи f и изразити је експлицитно као функцију од $z = x+iy$.

31. Наћи аналитичку функцију f чији је имагинарни део

$$v(x,y) = e^{x^2-y^2-x} \cdot \sin(2xy - y).$$

Изразити f експлицитно као функцију од $z = x+iy$.

32. Наћи аналитичку функцију f чији је имагинарни део $v(x,y) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \sin \dfrac{y}{x^2+y^2}$. Изразити f експлицитно као функцију од $z = x+iy$.

33. Доказати да $v(x,y) = -\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{th} y)$ може бити имагинарни део неке аналитичке функције f. Наћи f и изразити је експлицитно као функцију од $z = x+iy$.

34. Доказати да $v(x,y) = x \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + y \ln \sqrt{x^2+y^2}$ може бити имагинарни део неке аналитичке функције f. Одредити f и изразити је експлицитно као функцију од $z = x+iy$.

35. Доказати да $v(x,y) = \operatorname{sh}(2xy)\sin(y^2-x^2)$ може бити имагинарни део неке аналитичке функције f. Наћи f и изразити је експлицитно као функцију од $z = x+iy$.

36. Наћи аналитичку функцију f чији имагинарни део је $v(x,y) = \Big((x^2-y^2)\sin y + 2xy\cos y\Big)e^x$. Изразити f експлицитно као функцију од $z = x+iy$.

37. Наћи аналитичку функцију f чији је имагинарни део $v(x,y) = e^{-2xy}\sin(x^2-y^2)$. Изразити f експлицитно као функцију од $z = x+iy$.

38. Показати да реална функција $v(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x+1}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ може бити имагинарни део неке комплексне аналитичке функције f. Наћи аналитичку функцију f чији је имагинарни део дата функција v, а затим изразити f експлицитно као функцију од $z = x+iy$.

39. Наћи аналитичку функцију f чији је реални део

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + e^x\cos y + x\sin x \operatorname{ch} y - y\cos x \operatorname{sh} y.$$

Изразити f експлицитно као функцију од $z = x+iy$. Одредити $f'(z)$.

40. Наћи аналитичку функцију f чији је имагинарни део $v(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{e^x \sin y}{e^x \cos y + 1}$. Изразити f експлицитно као функцију од $z = x+iy$.

41. Доказати да
$$v(x,y) = -2\sin(2x)\,\mathrm{sh}(2y) + y$$
може бити имагинарни део аналитичке функције f. Наћи аналитичку функцију f ако је $f(0) = 2$, изразити f експлицитно као функцију од $z = x + iy$ и одредити $f^{'}(z)$.

42. Показати да реална функција $v(x,y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ може бити имагинарни део неке комплексне аналитичке функције f. Наћи аналитичку функцију f чији је имагинарни део дата функција v. Затим изразити f експлицитно као функцију од $z = x + iy$, ако је $f(1) = i - 2$.

43. Одредити аналитичку функцију $w(z) = u(x,y) + iv(x,y),\ z = x + iy \in \mathbb{C}$ за коју је њен реални део реална функција облика $u = f(x^2+y^2),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, где је f два пута непрекидно диференцијабилна реална функција.

44. Нека су $\phi(x,y)$ и $\psi(x,y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ хармонијске функције. Доказати да функције u и v дате са:
$$u(x,y) = \phi_x\phi_y + \psi_x\psi_y \quad \text{и} \quad v(x,y) = \frac{1}{2}\left(\phi_x^2 + \psi_x^2 - \phi_y^2 - \psi_y^2\right),$$
задовољавају Коши – Риманове једначине и показати да је $f = u + iv$ аналитичка функција.

45. Доказати да је функција $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$ дата са
$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2}, & z = x + iy \neq 0 \\ 0, & z = x + iy = 0. \end{cases}$$
непрекидна, да њен реални и имагинарни део u и v задовољавају Коши-Риманове једначине у $z = 0$, али да функција f ипак није диференцијабилна у $z = 0$.

46. Одредити аналитичку функцију $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, за коју је њен реални део реална функција $u(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln((x+1)^2 + y^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,y) | y \in \mathbb{R}\}$ и изразити f експлицитно као функцију од $z = x + iy$.

3 Комплексна интеграција

47. Израчунати $\int\limits_c \frac{1}{\overline{z}}\, dz$, где је c позитивно оријентисана јединична кружница $|z| = 1$.

48. Израчунати $\int\limits_C |z|\overline{z}\, dz$ где је C позитивно орјентисана контура која се састоји из горње полукружнице $|z| = 1$ и сегмента $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

49. (а) Скицирати криву $\gamma = \{z(t) \mid t \in [0,2]\}$, где је параметризација $z:\ [0,2] \to \mathbb{C}$ дата са

$$z(t) = \begin{cases} 1 + t(-i-1) & \text{за } t \in [0,1] \\ 1 - t + i(t-2) & \text{за } t \in [1,2]. \end{cases}$$

(б) Одредити вредност интеграла $\int\limits_\gamma \frac{1}{z}\, dz$.

50. Показати да је

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta)\, d\theta = 2\pi.$$

Упутство: Посматрати интеграл функције $\frac{e^z}{z}$ дуж јединичног круга.

51. Без израчунавања интеграла, показати да је

$$\left| \int\limits_C \frac{dz}{\overline{z}^2 + \overline{z} + 1} \right| \leqslant \frac{9\pi}{16},$$

где је крива C лук кружнице $|z| = 3$ од тачке $z = 3$ до тачке $z = 3i$ који лежи у првом квадранту.

52. Нека је крива C позитивно оријентисана кружница $|z| = 1$.

(а) Израчунати $\int\limits_C \frac{1}{z^2 - 8z + 1} dz$. (б) Користећи резултат под (а), израчунати $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{4 - \cos\theta} d\theta$.

53. Нека је дат $a \in \mathbb{C}$. Израчунати интеграл

$$\int\limits_C (z-a)^k\, dz, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ако је крива C део кружнице $|z - a| = R$, где је $0 \leqslant \arg(z-a) \leqslant \pi$ усмерена од тачке $a + R$ ка $a - R$.

54. Израчунати интеграл $\int\limits_L z^2 \overline{z} dz$, где је крива L део кружнице са центром у 0, која спаја тачку 1 са тачком i.

55. Израчунати комплексни интеграл $\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos(z + \pi i)}{z(e^z + 2)}\, dz$.

56. Израчунати интеграл $\int\limits_c \frac{z^2}{z^4-1}\,dz$, где је $c:\ |z|=2$ позитивно оријентисана кружница.

57. Израчунати интеграл $\int\limits_c \frac{(z^2-1)\cos(\pi z)}{z^2+1}\,dz$, где је $c:|z|=2$ негативно оријентисана кружница.

58. Израчунати интеграл
$$\int\limits_C \frac{z-i}{z^3+2z^2}\,dz,$$
где је крива C позитивно орјентисана кружница $|z|=3$.

59. Израчунати интеграл $\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^2+2z}dz.$

60. Израчунати интеграл
$$\int\limits_C \frac{z\sin(\pi z)}{(z^2+1)^2}\,dz,$$
где је крива C позитивно оријентисана кружница $|z-i|=1$.

61. Израчунати интеграл
$$\int\limits_\Gamma \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz,\ \text{где је крива } \Gamma$$
   (а) негативно оријентисана кружница $|z|=3$;
   (б) позитивно оријентисана кружница $|z-3+2i|=1$.

62. Израчунати интеграл
$$\int\limits_\Gamma \frac{e^z\cos(\pi z)}{z^2+2z}dz,\ \text{где је крива } \Gamma$$
   (а) позитивно оријентисана кружница $|z|=1$; (б) негативно оријентисана кружница $|z|=3$.

63. Израчунати интеграл
$$\int\limits_c \frac{e^{\frac{1}{10-z}}\cos(\pi z)}{(2z-z^2)^2}dz,\ \text{где је крива } c$$
   (а) позитивно оријентисана кружница $|z|=1$;
   (б) негативно оријентисана кружница $|z-8i+2|=1$.

64. Израчунати интеграл
$$\int\limits_C \frac{e^{\frac{1}{z-13i}}\sin(\pi z)}{(z-1)(\frac{3}{2}-z)(z-5)^3}\,dz,$$
где је крива C кружница $\left|z-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{4}$ усмерена у правцу казаљке на сату.

65. Нека је c негативно оријентисана граница квадрата чије странице леже дуж правих $x = \pm 2$, $y = \pm 2$. Израчунати интеграл: (а) $\displaystyle\int_c \frac{\operatorname{ch} z}{z^2 + z} dz$; (б) $\displaystyle\int_c \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{z}{2}\right)}{z - \frac{\pi}{2}} dz$.

66. Израчунати интеграл $\displaystyle\int_c g(z) dz$, ако је крива $c : |z - i| = 2$ негативно оријентисана и

(а) $g(z) = \dfrac{1}{z^2 + 4}$; (б) $g(z) = \dfrac{1}{z(z^2 + 4)}$.

67. Нека је c граница троугла са теменима у тачкама 0, -4 и $3i$, оријентисана у позитивном смеру. Израчунати $\displaystyle\int_c (e^z - \overline{z})\, dz$.

68. Нека је дат интеграл $I = \displaystyle\int_\gamma z e^{z^2}\, dz$.

(а) Да ли интеграл I зависи од путање интеграције γ или зависи само од њених крајњих тачака?

(б) Одредити вредност интеграла I ако је крива γ део параболе $y = x^2$ у комплексној равни од тачке 0 до тачке $1 + i$.

4 Тејлоров и Лоранов ред

69. Нека је дата комплексна функција f таква да је $z = f(z)(e^z - 1),\ z \in \mathbb{C}$. Одредити коефицијенте и полупречник конвергенције развоја у Маклоренов ред функције f.

70. Развити у Маклоренов ред функцију

$$f(z) = \int_0^z \frac{\sin\omega}{\omega} d\omega$$

и одредити полупречник конвергенције добијеног реда.

71. Одредити полупречник конвергенције степеног реда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$ и испитати понашање реда на рубу области конвергенције.

72. Развити комплексну функцију $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ у Тејлоров ред у околини тачке $z = i$ и одредити полупречник конвергенције добијеног реда.

73. Развити функцију $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ у Тејлоров ред у околини тачке $z_0 = i$ и одредити полупречник конвергенције добијеног реда.

74. Развити функцију $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$ у Лоранов ред у тачки $z_0 = 2$.

75. Развити функцију $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$ у Лоранов ред у прстену $1 < |z| < 2$.

76. Развити функцију $f(z) = \frac{z+1}{z^4 - 12z^3 + 48z^2 - 64z}$ у Лоранов ред у околини тачке $z_0 = 4$ и одредити полупречник конвергенције добијеног реда.

77. Развити функцију $f(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 2}$ у Лоранов ред у прстену: (а) $1 < |z| < 2$; (б) $0 < |z-2| < 1$.

78. Развити функцију $f(z) = \frac{z+4}{z^2(z^2+3z+2)}$ у Лоранов ред у прстену: (а) $1 < |z| < 2$; (б) $0 < |z+1| < 1$.

79. Развити у ред обе гране вишезначне комплексне функције $f(z) = 1 + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z^2}$ у околини $z_0 = 0$ и одредити област конвергенције тих редова.

5 Сингуларитети и резидуум комплексне функције

80. Одредити сингуларитете функције:

$$\text{(а) } f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2} \qquad\qquad \text{(б) } f(z) = \frac{\cos z - 1}{z},$$

а затим је развити у ред у околини једног од њих. Ако функција има отклоњиви сингуларитет у тачки z_0, коју би вредност требало доделити функцији f у z_0 тако да буде аналитичка? Ако функција f има пол у тачки z_0 одредити му ред.

81. Одредити карактер сингуларитета следећих функција (укључујући и $z = \infty$):

(а) $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$;

(б) $g(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^4}$;

(ц) $h(z) = \dfrac{(z-1)^2(z+3)}{1 - \sin\frac{\pi z}{2}}$;

(д) $k(z) = \sqrt[3]{z}\,\mathrm{Ln}\,\dfrac{z}{z-1}$;

(е) $m(z) = \dfrac{1 + \sqrt{2z^4 + z^3 + 2z^2 + 1}}{z^5}$.

82. Дата су функције $f(z) = \dfrac{z+3}{z^2-1}$, $\quad g(z) = \dfrac{1}{\cos\frac{1}{z}}$, $\quad h(z) = \dfrac{z^2+1}{z^{\frac{3}{2}}}$.

(а) 1. Испитати карактер сингуларитета функција f, g и h (укључујући и $z_0 = \infty$).

(б) Развити функције у Лоранов ред око тачке $z = 0$, ако је то могуће, па им одредити и резидуме у $z = 0$.

83. Одредити сингуларитете функције: $f(z) = \dfrac{(z-1)^2(z+3)}{1 - \sin\frac{\pi z}{2}}$.

Ако функција има отклоњиви сингуларитет у тачки z_0, коју би вредност требало доделити функцији f у z_0 тако да буде аналитичка? Ако функција f има пол у тачки z_0 одредити му ред. Развити функцију f у Тејлоров ред у околини тачке $z = 1$, ако је то могуће.

84. Развити функцију $f(z) = \dfrac{z^2 - 2iz - ie^{\frac{1}{z-i}}}{z-i}$ у Лоранов ред у околини тачке $z_0 = i$. Одредити област конвергенције тог реда и резидуум функције f у z_0.

85. Дата је функција $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2(z+1)}$.

(а) Испитати карактер сингуларитета функције f (укључујући и $z_0 = \infty$).

(б) Развити функцију у Лоранов ред око сваког сингуларитета око којег је то могуће и одредити резидууме.

86. Дата је функција $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^3(1-z)}$.

(а) Испитати карактер сингуларитета функције f (укључујући и $z_0 = \infty$).

(б) Развити функцију у Лоранов ред око сваког сингуларитета око којег је то могуће и одредити резидууме.

87. Нека је дата функција $g(z) = \dfrac{z^2 \cos az}{(z^2+1)(z^2+2)}$, $a > 0$.

(а) Испитати карактер сингуларитета функције g.

(б) Развити функцију у Лоранов ред који ће конвергирати за $|z| > \sqrt{2}$.

88. Нека је дата функција $f(z) = (1-z)^2 \sin \dfrac{1}{1-z}$.

(а) Наћи све сингуларитете функције f и одредити им тип.

(б) Развити функцију у ред у околини тачке $z = 1$ и одредити полупречник конвергенције добијеног реда.

(ц) Одредити резидуум функције f у тачки $z = \infty$.

(д) Израчунати интеграл $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} f(z)dz$.

89. Дата је функција $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2}\Big(e^{\frac{z}{1-z}} - 1\Big)$.

(а) Испитати карактер сингуларитета функције f (укључујући и $z_0 = \infty$).

(б) Развити функцију у Лоранов ред око сваког сингуларитета око којег је то могуће и одредити резидууме.

90. Одредити све сингуларитете функције

$$f(z) = \frac{\operatorname{Ln} z}{(z-1)^3}$$

и одредити им тип. Развити функцију f у Лоранов ред у околини оних сингулатитета где је то могуће.

91. Нека је дата функција $f(z) = \dfrac{1+\sqrt{1-z^2}}{z^2} \operatorname{Ln}(z+1)$.

(а) Наћи све сингуларитете функције f и одредити им тип.

(б) Развити функцију f у Лоранов ред у тачки $z = 0$ (за главну грану корена и главну грану логаритма).

92. Одредити све сингуларитете функције $f(z) = z^3 \cos \dfrac{1}{z-2}$, а затим је развити у Лоранов ред на прстену $0 < |z-2| < \infty$.

93. Испитати карактер сингуларитета (укључујући и $z_0 = \infty$) следећих функција:

(а) $f(z) = \sqrt{z} \operatorname{Ln} \dfrac{1-\sqrt{z}}{z+\sqrt{z}} + \dfrac{e^{\frac{1}{\sqrt{z}+1}}}{z-\sqrt{z}}$; (б) $g(z) = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2 z}$.

Да ли се функција f може развити у Лоранов ред у околини $z_0 = 0$? Образложити.

94. Испитати карактер сингуларитета (укључујући и $z_0 = \infty$) функција:

(а) $f(z) = \dfrac{1+e^{-z}}{1-e^{-z}} - \dfrac{1}{2z}$; (б) $g(z) = \dfrac{1}{z}\sqrt{\dfrac{i-2z^3}{z}}$.

95. Одредити све сингуларитете функције

$$g(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z}$$

и одредити им тип. Одредити резидууме функције g у свим изолованим сингуларитетима.

96. Нека је дата комплексна функција $f(z) = \dfrac{1}{z}\, e^{\frac{1}{1-z}}$.

(а) Наћи све сингуларитете функције f и одредити њихов тип.

(б) Израчунати резидуум функције f у тачки $z = \infty$.

(ц) Израчунати $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} f(z)\, dz$.

97. * Испитати карактер сингуларитета (укључујући и $z_0 = \infty$) и израчунати резидууме у оним сингуларитетима у којима постоје за функцију

$$f(z) = \frac{z}{z^2-1}\left(e^{\frac{z-1}{z}} - 1\right).$$

98. Нека је дата функција $f(z) = \dfrac{\sin\frac{1}{z}}{(z-1)^2}$.

(а) Наћи све сингуларитете функције f и одредити им тип.

(б) Одредити резидуум функције f у тачки $z = \infty$.

(ц) Развити функцију у ред у околини тачке $z = 0$ и одредити полупречник конвергенције добијеног реда.

(д) Израчунати интеграл $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} f(z)dz$.

99. Дата је функција $f(z) = \dfrac{1 + z^2(z-1)\sqrt{z^2-2z+2}}{z-1}$.

(а) Наћи све сингуларитете функције f и одредити им тип.

(б) Развити функцију f у Лоранов ред у околини тачке $z = 1$ за ону грану f за коју је аргумент $\sqrt{z^2-2z+2}$ у $z = 0$ једнак нули и одредити полупречник конвергенције добијеног реда.

(ц) Одредити резидуум функције f у тачки $z = 1$.

100. Дата је функција $f(z) = \dfrac{\sin\frac{z+1}{z}}{z^3\sqrt{z+1}}$.

(а) Испитати карактер сингуларитета функције f (укључујући и $z_0 = \infty$).

(б) Израчунати резидууме (за главну грану корена) у свим сингуларитетима у којима постоје.

101. Наћи све сингуларитете функције $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z - 1}$ и одредити им тип. Израчунати $\operatorname{Res}(f, 0)$.

102. Одредити све сингуларитете функције $g(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z(z+1)}$, а затим одредити $\operatorname{Res}(g, 1)$.

103. Испитати карактер сингуларитета (укључујући и $z_0 = \infty$) и израчунати резидууме у оним сингуларитетима у којима постоје: (а) $f(z) = \dfrac{\sin \frac{z+1}{z}}{z+1}$; (б) $f(z) = \operatorname{arctg} z$.

104. Дата је функција $f(z) = \dfrac{z}{\sqrt{z^3-8}} e^{\frac{1}{z+1}}$.

(а) Испитати карактер сингуларитета функције f (укључујући и $z_0 = \infty$).

(б) Израчунати резидууме у свим сингуларитетима у којима постоје.

105. Испитати карактер сингуларитета (укључујући и $z_0 = \infty$) и израчунати резидууме у оним сингуларитетима у којима постоје:

(а) $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}} - 1}{z-1}$; (б) $g(z) = \operatorname{arcth} z$.

Да ли се функција g може развити у Лоранов ред у околини $z_0 = 1$? Образложити.

106. Испитати карактер сингуларитета (укључујући и $z_0 = \infty$) следећих функција:

(а) $f(z) = \dfrac{\sin \frac{1}{z}}{1-z^3}$; (б) $g(z) = \dfrac{e^z}{z(z-1)^2}$; (ц) $h(z) = \sqrt[3]{\dfrac{z-1}{z+1}}$.

Израчунати резидууме функције g у оним сингуларитетима у којима постоје.

107. * Дата је функција

$$f(z) = \frac{\sqrt{1+z+z^2+z^3} - 1}{z^9}.$$

(а) Одредити карактер сингуларитета функције f (укључујући и $z_0 = \infty$).

(б) Израчунати резидууме (за главну грану корена) у оним сингуларитетима у којим постоје.

108. * Дата је функција $f(z) = \dfrac{(z^5+1)\operatorname{Ln}(1-z)e^{\frac{1}{z}}}{z^4(z+1)}$.

(а) Испитати карактер сингуларитета функције f (укључујући и $z_0 = \infty$).

(б) Израчунати резидууме (за главну грану логаритма) у свим сингуларитетима у којима постоје.

109. * Дата је функција $f(z) = \dfrac{(z^3-1)\operatorname{th} z}{z^7(z^2-1)}$.

(а) Испитати карактер сингуларитета функције f (укључујући и $z_0 = \infty$).

(б) Израчунати резидууме у свим сингуларитетима у којима постоје.
(**Помоћ**: може се искористити једнакост $(\operatorname{th} z)' = 1 - \operatorname{th}^2 z$ за развијање функције у Маклоренов ред.)

110. * Дата је функција $f(z) = \dfrac{\sqrt{z+2}\,\operatorname{Ln}(2+2z+z^2)}{(z+1)^6}$.

(а) Испитати карактер сингуларитета функције f (укључујући и $z_0 = \infty$).

(б) Развити функцију у Лоранов ред око сваког сингуларитета око којег је то могуће и одредити резидууме (за главну грану корена и логаритма).

111. Испитати карактер сингуларитета (укључујући и $z_0 = \infty$) и израчунати резидууме функција f и h (за главну грану логаритма) у оним сингуларитетима у којима постоје:

(а) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^{2020}}$; (б) $h(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}} \operatorname{Ln}(1-z)}{z^2}$.

112. Дата је функција $f(z) = \dfrac{z}{\sqrt{1+z^3}} e^{\frac{1}{z}}$.

(а) Испитати карактер сингуларитета функције f (укључујући и $z_0 = \infty$).

(б) Израчунати резидууме у свим сингуларитетима у којима постоје.

113. Развити функцију $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)(z-i)^3}$ у Лоранов ред у околини тачке $z_0 = 1$ који конвергира у тачки $\dfrac{i}{2}$. Одредити област конвергенције добијеног реда и израчунати резидуум функције f у тачки $z_0 = 1$.

114. Одредити $k \in \mathbb{N}$ тако да $z = 0$ буде пол другог реда функције $h(z) = \dfrac{e^z - 1 - z}{z^k}$. Израчунати резидуум функције h у изолованим сингуларитетима.

115. Дата је функција $f(z) = \dfrac{1}{z} \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

а) Наћи све сингуларитете функције f и одредити им тип.

б) Развити функцију f у Лоранов ред у околини тачке $z = 0$.

в) Одредити резидуум функције f у тачки $z = 1$.

г) Израчунати: $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)\, dz$.

6 Примене теорије резидуума при решавању реалних интеграла

116. Израчунати, у зависности од реалног параметра p, интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2p\cos t+p^2}, \qquad \text{где је} \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}.$$

117. Израчунати интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{(a-\cos x)^2} dx, \qquad a \in \mathbb{R},\ a > 1.$$

118. Применом комплексне интеграције доказати да је $I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{a+b\cos t}\, dt = \frac{2\pi}{b^2}\left(a - \sqrt{a^2-b^2}\right)$,

где је $a > |b| > 0$.

119. Израчунати интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos t} dt, \qquad \text{где је} \quad a \in \mathbb{R},\ a > 1.$$

120. Показати да је

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5-3\sin t)^2} = \frac{5\pi}{32}.$$

121. Применом комплексне интеграције израчунати интеграл $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x + 2\sin x - 3}$.

122. Израчунати интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}, \qquad \text{где је} \quad a, b \in \mathbb{R},\ a > b > 0.$$

123. Користећи комплексну интеграцију израчунати

$$\int_0^{2\pi} \frac{1+\sin x}{1+\sin^2 x} dx.$$

124. Користећи комплексну интеграцију показати да је

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} \frac{d\theta}{2\pi} = 1, \qquad 0 \leqslant r < 1.$$

125. Применом комплексне интеграције израчунати интеграл $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+\cos\theta)^2}\, d\theta$, ако је $a > 1$.

126. Израчунати интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx, \quad a \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

127. Израчунати интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x(x^2+1)^2} dx.$$

128. Користећи комплексну интеграцију израчунати

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)^3}\ dx.$$

129. Користећи комплексну интеграцију израчунати

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2} dx, \qquad a, b > 0.$$

130. Користећи комплексну интеграцију израчунати

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x\ dx}{(x^2+1)^3}.$$

131. Применом комплексне интеграције одредити вредност реалног интеграла: $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3}\, dx.$

Напомена: Користити криволинијски интеграл одговарајуће комплексне функције дуж криве која је граница сектора датог у поларним координатама

$\left\{ re^{i\varphi} :\ 0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{2\pi}{3} \right\},\ R > 1.$

132. Користећи комплексну интеграцију показати

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

133. Применом комплексне интеграције, израчунати интеграл: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+2)(x^2+3)}\ dx.$

134. Применом комплексне интеграције показати да важи

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^4+1}\ dx = \frac{\pi}{4}.$$

135. Применом комплексне интеграције показати да важи

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^6}\,dt = \frac{\pi}{3}.$$

136. Користећи комплексну интеграцију показати

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^2+a^2}dt = \frac{\pi}{2a}e^{-a}, \qquad a>0.$$

137. Применом комплексне интеграције показати да важи

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{e}.$$

138. Применом комплексне интеграције показати: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2e}.$

139. Израчунати интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2ax+b^2}, \qquad a,b\in\mathbb{R},\ b>a>0.$$

140. Одредити

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{2x\,dx}{(x^2+4)^2}.$$

141. Користећи комплексну интеграцију доказати да је

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\,dx = \frac{\pi}{8a^3}, \qquad \operatorname{Re} a>0.$$

142. Израчунати интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \qquad \text{где је} \quad a,b\in\mathbb{R},\ a>0,\ b>0.$$

143. Израчунати интеграл $I = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{x^3-x^2+x-1}.$

144. Користећи комплексну интеграцију показати

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin\pi x}{x^2+2x+5}dx = -\pi e^{-2\pi}.$$

145. Показати да за $a > 0$ важи

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}\sin a.$$

146. Применом комплексне интеграције решити несвојствени реални интеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x dx}{x^2-5x+6}$.

Напомена. Може се користити чињеница да је $\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\,dt,\ R > 0.$ Такође, важи $\sin t \geqslant \frac{2t}{\pi},\ t \in [0, \pi/2]$.

147. Применом комплексне интеграције показати да важи

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{(e^x+1)(e^x+2)}\,dx = \frac{\pi(1-2^{a-1})}{\sin a\pi}, \qquad a \in (0,2).$$

148. Израчунати интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+c)^2}dx,$$

где је $c > 0$ произвољан реалан број.

149. Применом комплексне интеграције показати да важи

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \qquad 0 < p < 1.$$

150. Израчунати, ако $p \notin \mathbb{Z}$ и $0 < p < 3$, интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

151. Користећи комплексну интеграцију израчунати

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x^2}\,dx, \qquad -1 < a < 1.$$

152. Одредити

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p\,dx}{(x^2+4)(x+4)^2}, \qquad -1 < p < 3.$$

7 Rušeova teorema i princip argumenta

153. Показати да се сви корени једначине $z^6 - 5z^2 + 10 = 0$ налазе у прстену $1 < |z| < 2$.

154. Показати да се сви корени полинома $P(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ налазе у прстену $\{z \in \mathbb{C} : \ 1 < |z| < 2\}$.

155. Одредити број нула полинома $P(z) = z^6 - z^5 + 6z^4 - 5z^3 + 8z^2 - 4z + 1$ којима је реални део строго позитиван.

156. Показати да за нуле полинома $P(z) = z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3$ важи да је $\operatorname{Re} z < 0$ и да нема реалних нула.

157. Одредити број нула полинома $P(z) = z^4 - 4z^3 + 11z^2 - 14z + 55$ у сваком квадранту.

158. У којим квадрантима комплексне равни се налазе корени једначине $z^4+z^3+4z^2+2z+3 = 0$? Да ли постоје реални или чисто имагинарни корени ове једначине? Образложити одговор.

159. Доказати да једначина $z^8 + 3z^3 + z + 5 = 0$ има тачно два корена у првом квадранту, ако је познато да нема реалних нула.

160. Одредити колико полином $P(z) = z^3 - 2z^2 + 2z - 1$ има нула у сваком квадранту (без координатних оса).

161. Одредити број нула полинома $P(z) = z^5+5z+3$ унутар јединичне кружнице као и у прстену $\{z \in \mathbb{C} : \ 1 < |z| < 2\}$.

162. Одредити број нула полинома $P(z) = z^8 + z^7 - 5z^4 + 20z^3 + z + 4$ у области $|z| < 3$ и у првом квадранту.

163. Одредити број нула полинома $P(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2$

   (а) у кругу $|z| < 4$;

   (б) у полуравни $\operatorname{Re} z > 1$.

164. Одредити број нула полинома $P(z) = z^6 + z^5 + 10z^4 + 3z^3 + z^2 + 2z + 1$

   (а) у прстену $1 < |z| < 4$;

   (б) у првом квадранту.

165. Одредити број решења једначине $z^7 - 5z^4 + iz^2 - 2 = 0$ унутар кружнице $|z| = 1$.

166. Одредити број нула полинома $P(z) = z^7 - 5z^4 + iz^2 - 2$

   (а) у области где је $|z| \geqslant 1$;

   (б) у десној полуравни.

167. Одредити број решења једначине $z^5 + iz^3 - 4z + i = 0$ у прстену $1 < |z| < 2$.

168. Показати да једначина $(z+2)e^{-z} = z+3$ нема решења којима је реални део строго позитиван.

169. Показати да једначина $(z + 1)e^{-z} = z + 2$ нема решења у десној полуравни.

170. Показати да једначина $z^4 + az + b = 0, \ a, b > 0$, има тачно једно решење у првом квадранту и да је његов аргумент већи од $\dfrac{\pi}{4}$.

171. Нека су $a, b \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$. Одредити број корена једначине $z^{2n} + a^2 z^{2n-1} + b^2 = 0$, чији је реални део позитиван.

Напомена: раздвојити на случајеве n парно и n непарно.

172. Нека је дат полином $P(z) = z^6 + 192z + 640$.

(а) Показати да корени полинома P нису реални бројеви, нити строго имагинарни комплексни бројеви;

(б) Показати да полином P има по један корен у првом и четвртом квадранту, а да у другом и трећем квадранту има по два корена.

173. Нека је f аналитичка функција на $|z| \geqslant 1$ и нека је $|f(z)| < 1$ на $|z| \leqslant 1$. Показати да f има јединствану фиксну тачку на $|z| \leqslant 1$, тј. да постоји јединствено решење једначине $f(z) = z$ на $|z| \leqslant 1$.

174. Доказати да за $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 1$, једначина

$$ze^{\lambda - z} = 1$$

има тачно једно решење унутар круга $|z| < 1$, и то реално.

175. Одредити број решења једначине $e^{-z} - 4z^2 = 1$ унутар јединичног круга $|z| < 1$. Доказати да су та решења реална.

176. Нека је k реалан број, такав да $k > 1$, и нека је $n \in \mathbb{N}$. Показати да једначина $z^n = e^{z-k}$ има n решења у кругу $|z| < 1$.

177. Нека је $a > e$. Показати да једначина $az^n = e^z$ има n решења унутар круга $|z| = 1$.

178. Нека је $\lambda \in \mathbb{C}$ такво да је $|\lambda| < 1$ и $n \in \mathbb{N}$. Показати да једначина

$$(z-1)^n e^z - \lambda = 0$$

има n решења унутар круга $|z - 1| < 1$.

179. Нека је f аналитичка функција на области D која садржи затворену јединичну лопту $\overline{B(0,1)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$. Претпоставимо да је $|f(z)| < 1$ за $|z| = 1$. Одредити колико решења има једначина $f(z) = z^n$ унутар $\overline{B(0,1)}$.