Аналитичка геометрија

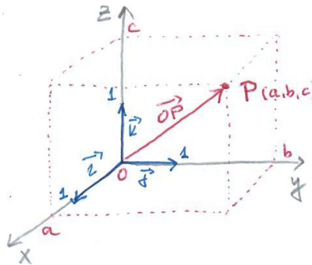
Предавање 8

Вектори у простору. Скаларни производ вектора

Вектори у простору и правоугли координатни систем

Дефиниција

Скуп свих дужи у простору које су истог интензитета, правца и смера назива се **вектор у простору**.



Базни вектори у простору су:

- $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$
- $\vec{\jmath} = (0, 1, 0)$
- $\vec{k} = (0, 0, 1)$

Напомена: Подсетимо се, за тачку $P(a, b, c)$ одговарајући **вектор** положаја је $\vec{r}_P = \overrightarrow{OP} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k} = (a, b, c)$
Са друге стране, представник вектора $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k} = (a, b, c)$ са почетком у координатном почетку O је баш вектор $\overrightarrow{OP}$

Вектори у простору – операције

- Множење вектора $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k} = (a, b, c)$ скаларом $\alpha \in \mathbb{R}$ је дато са $\alpha\vec{v} = (\alpha a)\vec{\imath} + (\alpha b)\vec{\jmath} + (\alpha c)\vec{k} = \alpha(a, b, c) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c)$
- Сабирање вектора $\vec{v}_1 = a_1\vec{\imath} + b_1\vec{\jmath} + c_1\vec{k} = (a_1, b_1, c_1)$ и $\vec{v}_2 = a_2\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + c_2\vec{k} = (a_2, b_2, c_2)$ је дато са $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (a_1 + a_2)\vec{\imath} + (b_1 + b_2)\vec{\jmath} + (c_1 + c_2)\vec{k} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$

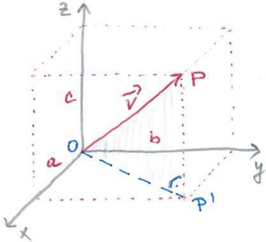
Пример 8.1 Изразити вектор $\overrightarrow{P_1P_2}$ преко базних вектора $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, ако је $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$

Копланарни вектори

Три не-нула вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ у простору су **копланарни** (припадају истој равни) ако су линеарно зависни, односно ако постоје $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тако да је $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Вектори у простору – особине

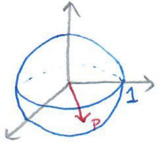
- Интензитет вектора



Нека је дат вектор $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$. Тада је

- $|\vec{v}| = \sqrt{|\overrightarrow{OP'}|^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
  ... применом Питагорине теореме
- Подсетимо се, важи и $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$, $\alpha \in \mathbb{R}$

- Нула вектор је $\vec{0} = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k}$; и он је заправо тачка.
- Јединични вектор је вектор дужине 1, односно онај вектор $\vec{v}$ за који је $|\vec{v}| = 1$.



Важи $|\vec{\imath}| = |1\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$, као и $|\vec{\jmath}| = 1$ и $|\vec{k}| = 1$.

Вектори у простору – особине

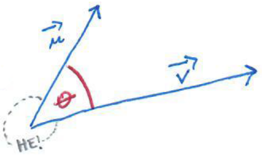
- Презентација вектора $\vec{v}$:
  - $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ јединични вектор истог правца и смера (паралелан и исто усмерен) као и $\vec{v}$ (нормирање вектора $\vec{v}$)
  - Онда је $\vec{v} = \underbrace{|\vec{v}|}_{\text{интензитет}} \cdot \underbrace{\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}_{\text{усмерење}}$

Пример 8.2 Нормирати вектор $\overrightarrow{P_1P_2}$, ако је $P_1(1,0,1)$ и $P_2(3,2,0)$

Пример 8.3 Одредити вектор дужине 6 паралелан вектору $\vec{v} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$

Скаларни производ вектора

је операција која пару вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ додељује скалар (број), $\vec{u} \cdot \vec{v}$



- Нека је $\theta \in [0, \pi]$ угао између вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$, који није усмерен
- Скаларни производ вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v}$, је

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$$

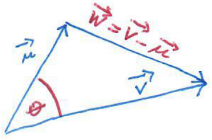
Приметимо:

- ако је $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (односно, ако $\vec{u}$ и $\vec{v}$ граде оштар угао), онда је $\vec{u} \cdot \vec{v} \geqslant 0$;
- ако је $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ (односно, ако $\vec{u}$ и $\vec{v}$ граде туп угао), онда је $\vec{u} \cdot \vec{v} \leqslant 0$;
- ако је $\theta = \frac{\pi}{2}$ (односно, ако су вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ нормални), онда је $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- вази $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}||\vec{u}| \cos 0 = |\vec{u}|^2$, односно $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

Пример 8.4 Одредити скаларни производ вектора $\vec{u} = 3\vec{k}$ и $\vec{v} = \sqrt{2}\vec{\imath} + \sqrt{2}\vec{k}$.

Напомена: Како није увек једноставно одредити угао θ између вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$, покушаћемо да утврдимо и други начин за израчунавање $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Скаларни производ вектора – израчунавање



Нека је:

- $\vec{u} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$
- $\vec{v} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$
- $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u} = (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath} + (z_2 - z_1)\vec{k}$

Применом косинусне теореме добијамо: $|\vec{w}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$.
Користећи да је $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$, добијамо да је $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-|\vec{w}|^2}{2}$;
односно, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2-\left((x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\right)}{2} = \frac{2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)}{2}$

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

- Користећи ово, сада можемо израчунати угао између вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$:

$$\theta = \arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}, \quad \theta\in[0,\pi]$$

Пример 8.5 Одредити угао између вектора $\vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ и $\vec{v} = (6, 3, 2)$.

Скаларни производ вектора – особине

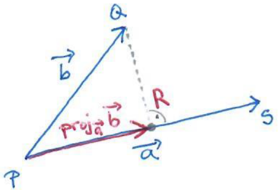
Издвојимо неке од особина скаларног производа вектора:

- *комутативност* скаларног производа: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- *множење скаларом* и скаларни производ: $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- *дистрибутивност* скаларниог производа:
  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;
  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ и
  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{w} + \vec{z}) = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{z} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{z}$

Покажимо да важи $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$. Заиста,

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= (u_1, u_2, u_3) \cdot \big((v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3)\big) \\
&= (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) \\
&= u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) + u_3(v_3 + w_3) \\
&= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 \\
&= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}
\end{aligned}
$$

Пројекција вектора



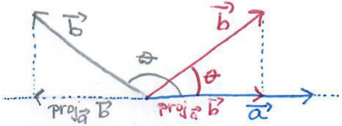
Нека су дати вектори $\vec{a} = \overrightarrow{PS}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{PQ}$.
Пројекција вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ је вектор $\overrightarrow{PR}$, где је R пројекција тачке Q на праву $p(P, S)$.

Користићемо запис: $\boxed{\mathrm{proj}_{\vec{a}}\,\vec{b} = \overrightarrow{PR}}$

Приметимо да важи:

$$\mathrm{proj}_{\vec{a}}\,\vec{b} = \underbrace{(|\vec{b}|\cos\theta)}_{\pm\text{дужина}}\ \underbrace{\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}_{\text{правац}}$$

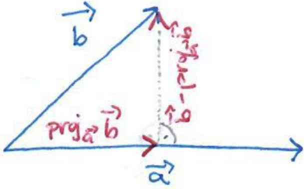
$$= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\,\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\vec{b}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a}.$$



Вредност $|\vec{b}|\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = \vec{b}\cdot\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ назива се *скаларна компонента пројекције* $\mathrm{proj}_{\vec{a}}\,\vec{b}$.

Вектор као сума ортогоналних вектора

Пример 8.6 Одредити $\operatorname{proj}_{\vec{a}} \vec{b}$ као и скаларну компоненту пројекције, ако је $\vec{a} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 6\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$.



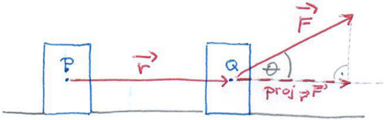
Нека је дат вектор $\vec{a}$. Написати вектор $\vec{b}$ као суму вектора паралелног и нормалног на $\vec{a}$.
Јасно, $\vec{b} = \operatorname{proj}_{\vec{a}} \vec{b} + (\vec{b} - \operatorname{proj}_{\vec{a}} \vec{b})$.
Како је $\operatorname{proj}_{\vec{a}} \vec{b}$ паралелан вектору $\vec{a}$, остаје још да се покаже да је $\vec{b} - \operatorname{proj}_{\vec{a}} \vec{b}$ нормалан на $\vec{a}$. Заиста,
$\vec{a} \cdot (\vec{b} - \operatorname{proj}_{\vec{a}} \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \operatorname{proj}_{\vec{a}} \vec{b} =$
$\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\, \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} - \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\right)\, \vec{a} \cdot \vec{a} = 0.$

Пример 8.7 Написати вектор $\vec{b} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}$ као збир вектора паралелног и нормалног на $\vec{a} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

Рад силе или механички рад, A

Подсетимо се: Сила врши механички рад ако при свом деловању покреће тело, мења брзину кретања тела, мења облик тела и сл. Дакле, да би се вршио механички рад треба да буду испуњена два услова: да делује сила и да се, на пример, тело креће под дејством те силе.

Дефиниција. Производ дужине пута, $\vec{r}$, које пређе тело под дејством неке силе, $\vec{F}$, и интензитета оне компоненте те силе која је у правцу кретања тела се назива **рад силе** и обележава са A.



$$A = |\vec{r}|\left|\mathrm{proj}_{\vec{r}}\,\vec{F}\right| = |\vec{r}||\vec{F}|\cos\theta = \vec{r}\cdot\vec{F}$$

Напомена. Приметимо да рад може бити и негативан, нпр. сила трења производи негативан рад. Тада уместо интензитета пројекције, користимо скаларну компоненту пројекције вектора силе на вектор правца кретања.

Пример 8.8 Одредити рад учињен деловањем силе јачине $40N$ под углом од 60° при померању тела за $3m$. (Јединица за рад силе је Џул, $J = Nm$)