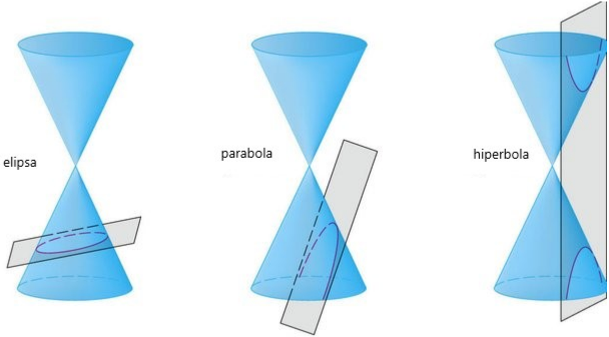
Аналитичка геометрија

Предавање 3

Конусни пресеци
(криве другог реда, квадратне криве)

Име – с обзиром на карактеристике

1. конусни пресек (коника) $\rightarrow$ крива у пресеку конуса и равни у разним положајима
2. квадратна крива $\rightarrow$ једначина $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
3. крива другог реда $\rightarrow$ са правом може да има највише две пресечне тачке



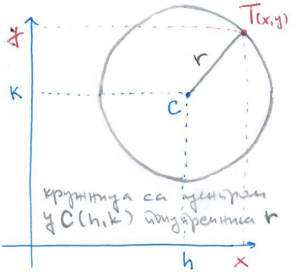
Конусне пресеке користимо да опишемо кретање небеских тела, кретање електрона у атому, у оптици описују облик сочива и огледала...

Канонске једначине конусних пресека

0° Кружница

Дефиниција. Нека је у равни дата тачка C. **Кружница** је скуп тачака у равни таквих да им је растојање од дате тачке C константно и износи r, $r > 0$. Дата тачка C се назива **центар кружнице**, а дато растојање r је **полупречник кружнице**.

Подсетимо се



- $d(T,0) = \sqrt{x^2+y^2} = r \Rightarrow$

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

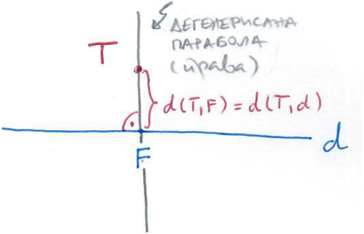
- $d(T,C) = \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r \Rightarrow$

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

Канонске једначине конусних пресека

1° Парабола

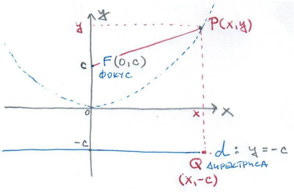
Дефиниција. Нека су дате права d и тачка F у равни. Скуп тачака у равни које се налазе на једнаком растојању од дате праве d и дате тачке F назива се **парабола**. Тачка F зове се **фокус**, а права d **директриса параболе**.



- Специјално, ако тачка F припада правој d (односно, $F \in d$) за описани скуп тачака добијамо да је права која је нормална на d у тачки F (*дегенерисану параболу, изобличену, одрођену*) слика

У наставку, претпоставимо да $F \notin d$.

Канонска једначина параболе



Координатни систем подесимо тако да је фокус $F(0,c)$, а директриса $d: \ y=-c$
Нека је $P(x,y)$ произвољна тачка са параболе.
Означимо са Q пројекцију тачке P на директрису d.
Јасно, важи $Q(x,-c)$. Тада

$$
\begin{aligned}
d(P,F) &= d(P,Q) \\
\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2} &= \sqrt{(x-x)^2+(y+c)^2} \\
x^2+y^2-2yc+c^2 &= y^2+2yc+c^2 \\
x^2 &= 4yc
\end{aligned}
$$

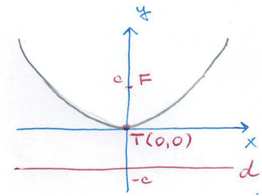
$$\boxed{y=\frac{1}{4c}x^2}$$

канонска једначина центриране параболе симетричне у односу на $y-$осу

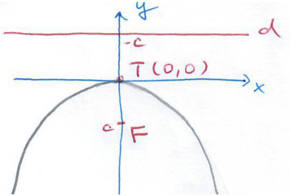
Канонска једначина параболе

Приметимо да је на претходном цртежу коришћено да је $c > 0$; за $c < 0$ само се цртеж, односно усмерење параболе мења, а канонска једначина параболе симетричне у односу на $y-$осу остаје $y = \frac{1}{4c}x^2$

$c > 0$



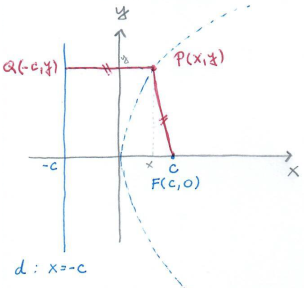
$c < 0$



- оса параболе – оса симетрије параболе (сада, $y-$оса)
- теме параболе – пресек параболе са њеном осом (сада, T(0,0))

Канонска једначина параболе

канонска једначина центриране параболе симетричне у односу на $x-$осу
се добија на потпуно аналоган начина



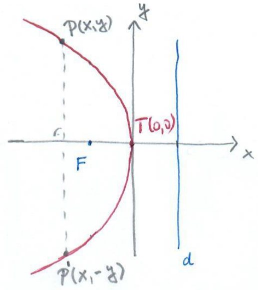
нека је директриса $d: \ x = -c$ и фокус $F(c,0)$ (на слици $c > 0$)
пројекција произвољне тачке $P(x,y)$ са параболе на директрису је $Q(-c,y)$ и важи

$$\begin{aligned}
d(P,F) &= d(P,Q) \\
\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} &= \sqrt{(x+c)^2+(y-y)^2} \\
x^2 - 2xc + c^2 + y^2 &= x^2 + 2xc + c^2 \\
y^2 &= 4xc
\end{aligned}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{4c} y^2}$$

Канонска једначина параболе

ако је $c < 0$
једначина параболе симетричне у односу на $x-$осу остаје $x = \frac{1}{4c}y^2$
међутим, график параболе је обрнуто усмерен



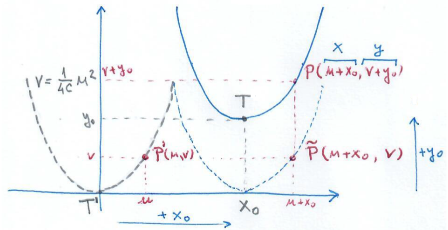
- оса симетрије посматране параболе је $x-$оса
- теме параболе је $T(0,0)$

Пример 3.1 За параболу $y^2 = 10x$ одредити директрису, фокус, осу симетрије и теме, те је на крају и скицирати

Канонска једначина параболе

Једначина параболе **транслиране** тако да јој је теме $T(x_0, y_0)$

кренемо од параболе, нпр.
$v = \frac{1}{4c}u^2, \ c > 0$
померимо је на ђесножа x_0
затим на ”горежа y_0



Тада, за тачку $P(x, y)$ са транслиране параболе у односу на одговарајућу тачку $P'(u, v)$ са центриране параболе важи:

нове координате (x, y)	старе кординате (u, v)
$x = u + x_0$	$u = x - x_0$
$y = v + y_0$	$v = y - y_0$

Канонска једначина параболе

За почетну (центрирану) параболу важи:

једначина је	$v = \frac{1}{4c}u^2$
фокус је	$F'(0, c)$
директриса је	$d' :\ v = -c$
теме је	$T'(0, 0)$
симетрична је у односу на	праву $u = 0$

Тада, **транслирана** парабола (са теменом у $T(x_0, y_0)$) задовољава:

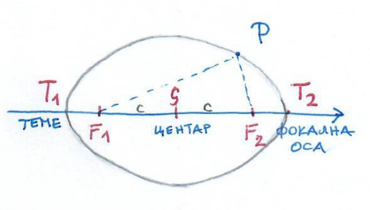
једначина је	$y - y_0 = \frac{1}{4c}(x - x_0)^2$
фокус је	$F(x_0, y_0 + c)$
директриса је	$d :\ y - y_0 = -c$
теме је	$T(x_0, y_0)$
симетрична је у односу на	праву $x - x_0 = 0$: оса је $x = x_0$

Пример 3.2 Одредити фокус, директрису, теме и осу симетрије параболе $x^2 + 2x + 4y - 11 = 0$; затим је и скицирати

Канонска једначина елипсе

2° Елипса

Дефиниција. Нека су дате две фиксиране тачке F_1 и F_2 у равни. **Елипса** је скуп тачака у равни таквих да им је збир растојања од датих тачака F_1 и F_2 константан. Дате тачке F_1 и F_2 називају се **фокуси елипсе**.



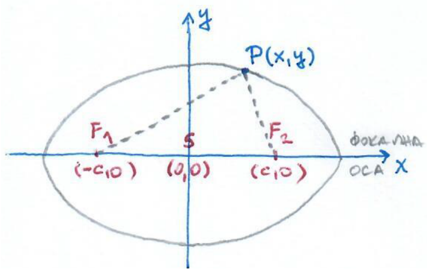
- права одређена фокусима F_1 и F_2 се назива *фокална оса*
- средина дужи F_1F_2 се назива *центар елипсе*
- за произвољну тачку P са елипсе важи $d(P,F_1)+d(P,F_2)=\mathrm{const}=2a$, ако је $d(F_1,F_2)=2c,\ c>0$, тада јасно важи $a\geq c$
- у пресеку елипсе и фокалне осе добијамо *темена елипсе*

Канонска једначина елипсе

Специјално, из дефиниције елипсе

- ако је $c = 0$, односно $F_1 = F_2$ и $a > 0$ добијамо кружницу;
- ако је $c = a = 0$ једну тачку;
- а ако је $c = a > 0$ добијамо дуж F_1F_2 слика

канонска једначина центриране елипсе са фокусима на $x-$оси



Координатни систем подесимо тако да је $x-$ оса фокална оса и да је центар елипсе у координатном почетку
дакле, $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$
Тада за произвољну тачку $P(x, y)$ са елипсе важи

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Канонска једначина елипсе

Дакле, користећи да је $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ и $P(x,y)$ добијамо:

$$
\begin{aligned}
d(P,F_1)+d(P,F_2) &= 2a\\
\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 2a\\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Big|^2\\
a\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= a^2-cx \quad \Big|^2\\
(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 &= a^2(a^2-c^2)\\
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2} &= 1 \quad \ldots\; b^2=a^2-c^2, \text{ jep je } a>c
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a>b}
$$

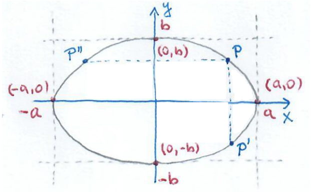
канонска једначина центриране елипсе са фокусима на $x-$оси

Канонска једначина елипсе

Неке особине елипсе које произилазе из њене канонске једначине:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- $\frac{x^2}{a^2} \in [0,1] \Rightarrow x \in [-a, a]$
- $\frac{y^2}{b^2} \in [0,1] \Rightarrow y \in [-b, b]$
- тачке $(\pm a, 0)$ и $(0, \pm b)$ припадају елипси
- Елипса је симетрична у односу и на $x-$осу и на $y-$осу
  $P(x,y) \longleftrightarrow P'(x,-y)$, као и $P(x,y) \longleftrightarrow P''(-x,y)$

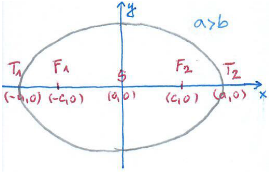


Канонска једначина елипсе

центрирана елипса са фокусима на $x-$оси

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b$$

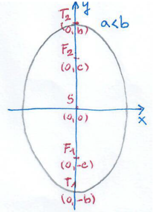
фокуси на $x-$оси су $F_i(\pm c, 0), \ i = 1, 2$
где је $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
темена су $T_i(\pm a, 0), \ i = 1, 2$



центрирана елипса са фокусима на $y-$оси

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a < b$$

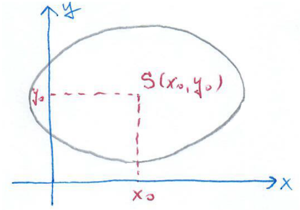
фокуси на $y-$оси су $F_i(0, \pm c), \ i = 1, 2$
где је $c = \sqrt{b^2 - a^2}$
темена су $T_i(0, \pm b), \ i = 1, 2$



Канонска једначина елипсе

Једначина елипсе са центром у $S(x_0, y_0)$ је

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}$$



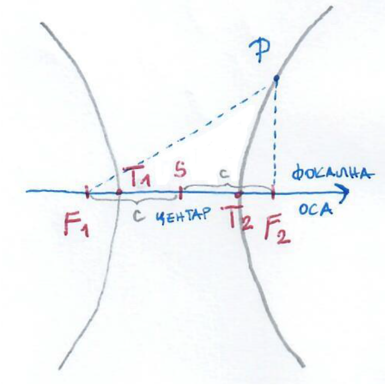
Пример 3.3 Нацртати елипсу $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ и одредити јој фокалну осу, као и саме фокусе и темена

Пример 3.4 Нацртати елипсу $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ и одредити јој фокалну осу, као и саме фокусе и темена

Канонска једначина хиперболе

3° Хипербола

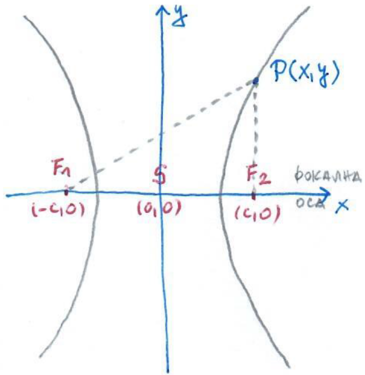
Дефиниција. Нека су дате две тачке у равни F_1 и F_2. **Хипербола** је скуп тачака у равни таквих да им је разлика растојања од датих тачака F_1 и F_2 константна. Дате тачке F_1 и F_2 називају се **фокуси хиперболе**.



- права одређена фокусима F_1 и F_2 се назива *фокална оса*
- средина дужи F_1F_2 се назива *центар хиперболе*
- за произвољну тачку P са хиперболе важи $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = \mathrm{const} = 2a$, нека је $d(F_1,F_2) = 2c,\ c > 0$, тада важи $a \leq c$
- у пресеку хиперболе и фокалне осе добијамо *темена хиперболе*

Канонска једначина хиперболе

канонска једначина центриране хиперболе са фокусима на $x-$оси



Координатни систем подесимо тако да је $x-$ оса фокална оса и да је центар хиперболе у координатном почетку дакле, $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$
Тада за произвољну тачку $P(x, y)$ са хиперболе важи

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

Канонска једначина хиперболе

Дакле, користећи да је $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ и $P(x,y)$ добијамо:

$$
\begin{aligned}
d(P,F_1) - d(P,F_2) &= \pm 2a \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} &= \pm 2a \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Big|^2 \\
\mp a\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= a^2 - cx \quad \Big|^2 \\
(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2-c^2) \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} &= 1 \quad \ldots\ b^2 = c^2 - a^2, \text{ јер је } a < c
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

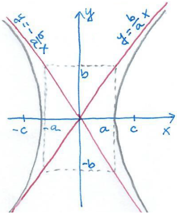
канонска једначина центриране хиперболе са фокусима на $x-$оси

Канонска једначина хиперболе

Неке особине хиперболе које произилазе из њене канонске једначине:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- $\frac{x^2}{a^2} \geq 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$
- што још имплицира да је $x \neq 0$, тј. хипербола не сече $y-$осу
- тачке $(\pm a, 0)$ припадају хиперболи
- Хипербола је симетрична у односу и на $x-$осу и на $y-$осу
- Хипербола има **асимптоте** јер из $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$ добијамо $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ одакле видимо $y \approx \pm\frac{b}{a}x$ када $x \to \infty$

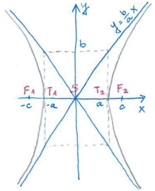


Канонска једначина хиперболе

центрирана хипербола са фокусима на $x-$оси

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

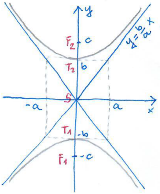
фокуси на $x-$оси су $F_i(\pm c, 0),\ i = 1, 2$
где је $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
темена су $(\pm a, 0)$
асимптоте $y = \pm \frac{b}{a} x$



центрирана хипербола са фокусима на $y-$оси

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

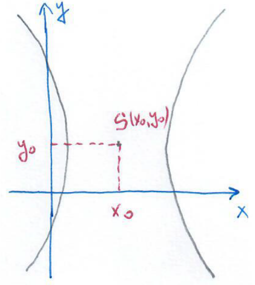
фокуси на $y-$оси су $F_i(0, \pm c),\ i = 1, 2$
где је $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
темена су $(0, \pm b)$
асимптоте $y = \pm \frac{b}{a} x$



Канонска једначина хиперболе

Једначина хиперболе са центром у $S(x_0, y_0)$ је

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}$$



Пример 3.5 Нацртати хиперболу $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ и одредити јој фокалну осу, као и саме фокусе, темена и асимптоте

Пример 3.6 Нацртати хиперболу $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$ и одредити јој фокалну осу, као и саме фокусе, темена и асимптоте