Аналитичка геометрија

Предавање 1

Правоугли (Декартов, Картезијански) координатни систем и (Еуклидско) растојање тачака

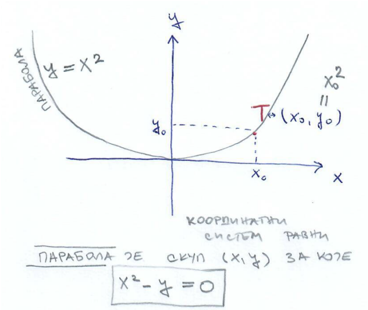
Кратак историјски преглед

- Аналитичка геометрија је, пре свега, геометрија, али са наглашеном употребом аналитичких и алгебарских метода.
- Основна идеја је да се геометријским објектима придруже једначине, а ово придруживање се врши посредством одговарајућег координатног система.
- Још у старој грчкој су астрономи и математичари (Хипарх, Архимед, Аполоније, 3. и 2. век п.н.е.) користили координате; на пример, положај звезда су одређивали са два броја: висином (алтитудом) и азимутом.
- Међутим, за оснивача Аналитичке геометрије, какву је данас знамо, се узима **Рене Декарт** (René Descartes, латинизирано Renatus des Cartes, 1596–1650) француски филозоф, математичар и научник. Декарт је 1637. године објавио своје чувено филозофско дело **Расправа о методи** (Discours de la méthode, потпун назив је *Расправа о методи како добро усмерити свој разум и тражити истину у наукама*), уоквиру ког је био и одељак под називом **Геометрија** (La géométrie). Декарт уводи правоугле координате, а криве описује као геометријско место тачака чије координате задовољавају одговарајуће једначине.
- Пре Декарта, у овом правцу су своја истраживања водили на пример Ферма, Кеплер, Вијет, а након њега Њутн, Лајбниц, Ојлер, Лагранж и др. Прво систематично дело из аналитичке геометрије је Elementa curvarum linearum, J. de Witta из 1659, а име јој је дао Lacroix 1798. год. Интензиван развоје аналитичке геометрије почиње тек у 19. веку, развојем других математичких дисциплина.

Основна идеја аналитичке геометрије

тачке у равни $\rightarrow$ уређени парови (x, y)

геометријски објекти (фигуре) $\rightarrow$ алгебарске (аналитичке) једначине $f(x, y) = 0$ или неједначине

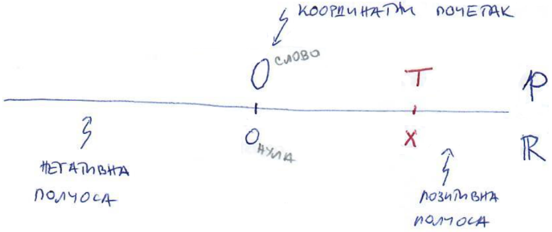


Дакле, геометријска фигура постаје бесконачан скуп решења (x, y) једначине $f(x, y) = 0$.

Литература

- Mašulović, D.: Analitička geometrija za informatičare. PMF, Novi Sad, 2019.
- Thomas, G., Finney, R.: Calculus and Analytic Geometry. 9th edition. Addison–Wesley, Reading, 1996.
- Gelfand, I. M., Glagoleva, E. G., Kirillov, A. A.: The Method of Coordinates. Birkhäuser, Boston, 1990.
- Stojaković, Z., Herceg, D.: Linearna algebra i analitička geometrija. Univerzitet u Novom Sadu, 1992.
- Blažić, N., Bokan, N., Lučić, Z., Rakić, Z.: Analitička geometrija. Matematički fakultet, Beograd, 2003.
- Jojić, D., Paunić, Đ.: Analitička geometrija. PMF, Banja Luka, 2016.
- Boyer, C. B.: History of Analytic Geometry. New York, Yeshiva University, 1956.

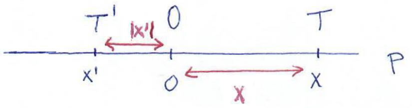
Правоугли координатни систем на правој



$$\begin{array}{ccc} \text{тачка} & & \text{координата} \\ T & \longmapsto & x \in \mathbb{R} \\ & \text{пишемо } T(x) & \end{array}$$

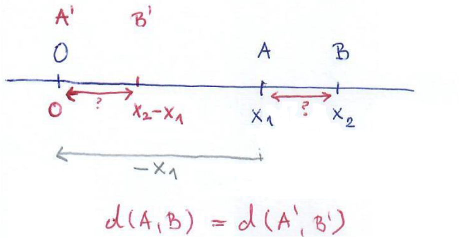
(Еуклидско) растојање тачака на правој

Растојање тачке $T(x)$ од координатног почетка $O(0)$



$$d(T, O) = |x| = |x - 0| = \sqrt{x^2}$$

Растојање тачке $A(x_1)$ од тачке $B(x_2)$



$$d(A, B) = |x_2 - x_1| = | - (x_1 - x_2)| = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$$

Пример 1.1 Одредити скуп тачака $T(x)$ на правој за које важи:

(a) $x > 2$ (*отворена полуправа*)

(b) $x \leq -2$ (*затворена полуправа*)

(c) да се налазе на растојању 2 од координатног почетка O (*сфера са центом у O полупречника 2 на правој*)

$$d(T, O) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad |x| = 2$$

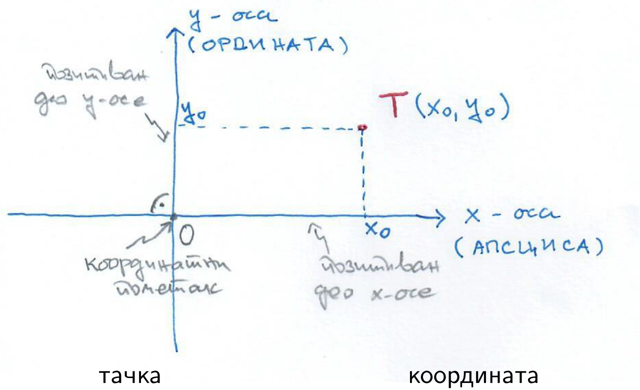
(d) $|x| < 2$ (*отворена лопта на правој*)

(e) $|x| \geq 2$ (*спољашњост отворене лопте на правој*)

(f) да су од тачке $C(1)$ на растојању које је мање или једнако 2 (*затворена лопта са центром у C полупречника 2 на правој*)

$$d(T, C) \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad |x - 1| \leq 2$$

Правоугли координатни систем у равни



$$\begin{array}{ccc} \text{тачка} & & \text{координата} \\ T & \longmapsto & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

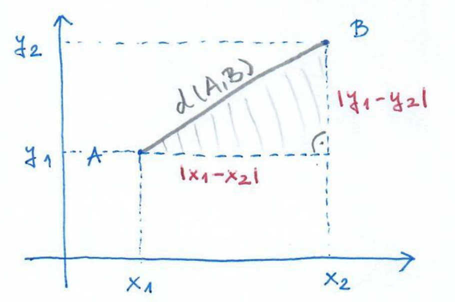
пишемо $T(x, y)$

(Еуклидско) растојање тачака у равни

Растојање тачке $T(x, y)$ од координатног почетка $O(0, 0)$

$$d(T, O) = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{Питагорина теорема}$$

Растојање тачке $A(x_1, y_1)$ од тачке $B(x_2, y_2)$



$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Пример 1.2 Одредити:

(a) растојања $d(A,O)$, $d(B,O)$ и $d(A,B)$, ако је $O(0,0)$ координатни почетак, $A(3,-4)$ и $B(4,2)$

(b) скуп тачака $T(x,y)$ које се од координатног почетка $O(0,0)$ налазе на растојању r, $r>0$
(*сфера са центром у O полупречника r у равни*)

$$\left\{ T(x,y) \;\middle|\; d(T,O)=\sqrt{x^2+y^2}=r \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2=r^2 \right\}$$

(c) неједначину којом се у равни описује отворена, односно затворена лопта са центром у $O(0,0)$ полупречника r, $r>0$
отворена лопта у равни је скуп тачака
$\left\{ T(x,y) \mid d(T,O)=\sqrt{x^2+y^2}<r \right\}$, односно $x^2+y^2<r^2$
затворена лопта у равни је скуп тачака
$\left\{ T(x,y) \mid d(T,O)=\sqrt{x^2+y^2}\leq r \right\}$, односно $x^2+y^2\leq r^2$

(d) једначину *сфере са центром у* $C(a,b)$ *полупречника* r, $r>0$
скуп тачака $\left\{T(x,y) \mid d(T,C)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r\right\}$, односно
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

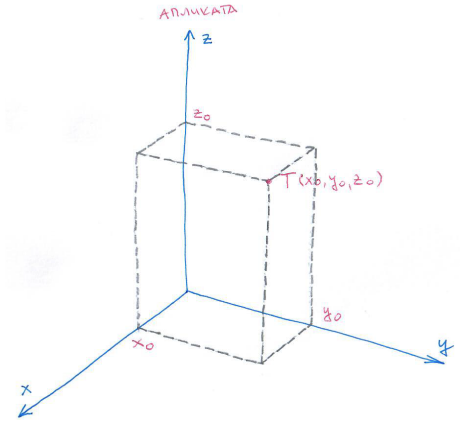
(e) једначину у задатку под (д) извести применом транслације

(f) скуп тачака $\left\{T(x,y) \mid x=y\right\}$ и $\left\{T(x,y) \mid |x|=|y|\right\}$

(g) скуп тачака $\left\{T(x,y) \mid x^2+y^2=-6\right\}=\emptyset$

Напомена: Нема свака алгебарска једначина (или неједначина) класичну геометријску интерпретацију; понекад, скуп тачака које задовољавају дату једначину буде неколико геометријских објеката или је, пак, празан скуп.

Правоугли координатни систем у простору

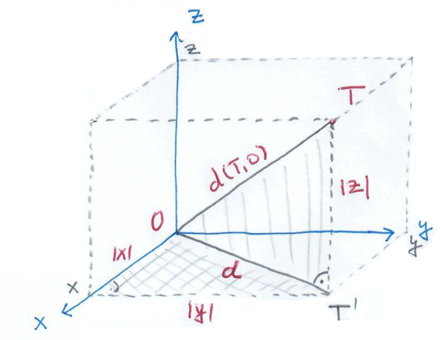


тачка		координата
T	$\longmapsto$	$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

пишемо $T(x, y, z)$

(Еуклидско) растојање тачака у простору

Растојање тачке $T(x, y, z)$ од координатног почетка $O(0, 0, 0)$



$$d(T, O) = \sqrt{d^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Растојање тачке $A(x_1, y_1, z_1)$ од тачке $B(x_2, y_2, z_2)$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Пример 1.3 Одредити:

(a) растојања $d(A,O)$, $d(B,O)$ и $d(A,B)$, ако је $O(0,0,0)$ координатни почетак, $A(3,-2,3)$ и $B(4,5,1)$; и нацртати дате тачке

(b) једначину (неједначину)
сфера са центром у O *полупречника* r, $r>0$ *у простору*
$$\left\{T(x,y,z)\ \middle|\ d(T,O)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r \ \Leftrightarrow\ x^2+y^2+z^2=r^2\right\}$$
отворена лопта у простору
$$\left\{T(x,y,z)\ \middle|\ d(T,O)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}<r\right\}, \text{ односно } x^2+y^2+z^2<r^2$$
затворена лопта у простору
$$\left\{T(x,y,z)\ \middle|\ d(T,O)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leq r\right\}, \text{ односно } x^2+y^2+z^2\leq r^2$$
сфера са центром у $C(a,b,c)$ *полупречника* r, $r>0$
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

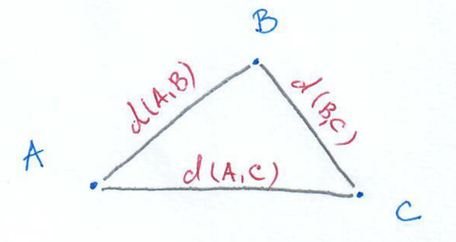
(c) геометријски објекат у простору описан једначином $x^2+y^2=r^2$, $r>0$.
добијамо *цилиндар* дуж $z-$осе

Напомена: *Центрирана сфера* је сфера са центром у координатном почетку, произвољног полупречника r, $r > 0$

Јединична сфера је центрирана сфера полупречника 1, нпр.
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ у простору или $x^2 + y^2 = 1$ у равни или $x^2 = 1$ на правој

Напомена: Било која функција d, која пару тачака додељује позитиван реалан број, а таква да задовољава наредне особине је функција растојања - метрика:

- $d(A, A) = 0$ за произвољну тачку A
- $d(A, B) = d(B, A)$ за било које две тачке A и B
- $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ за произвољну тројку тачака A, B, C неједнакост троугла



или, на други начин речено $|d(A, B) - d(B, C)| \leq d(A, C)$

Напомена: *Еуклидско растојање је метрика.* Нека су у равни дате три произвољне тачке $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$. Тада важи:

- $d(A, A) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2} = 0;$
- $$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(-(x_2 - x_1))^2 + (-(y_2 - y_1))^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d(B, A); \end{aligned}$$
- Покажимо, на крају, да важи $d(A, B) \le d(A, C) + d(C, B)$.

$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \le \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$

$\sqrt{|x_1 \pm x_3 - x_2|^2 + |y_1 \pm y_3 - y_2|^2} \le \sqrt{|x_1 - x_3|^2 + |y_1 - y_3|^2} + \sqrt{|x_3 - x_2|^2 + |y_3 - y_2|^2}$

Ако уведемо ознаке $a = |x_1 - x_3|$, $b = |x_3 - x_2|$, $c = |y_1 - y_3|$, $d = |y_3 - y_2|$ добијамо ... уз $|x_1 - x_3 + x_3 - x_2| \le |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \Rightarrow |x_1 - x_3 + x_3 - x_2|^2 \le (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|)^2$

$$\begin{aligned} \sqrt{(a + b)^2 + (c + d)^2} &\le \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2} \quad \Big|^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 + c^2 + 2cd + c^2 &\le a^2 + c^2 + b^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)} \\ ab + cd &\le \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)} \quad \Big|^2 \\ a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 &\le a^2b^2 + a^2d^2 + c^2b^2 + c^2d^2 \\ 0 &\le a^2d^2 + c^2b^2 - 2abcd = (ad - cb)^2 \end{aligned}$$

а то је тачно за све $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$.