Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Dragan Mašulović

Analitička geometrija za informatičare

Novi Sad, 2019.

Naziv udžbenika: Analitička geometrija za informtičare

Autor: dr Dragan Mašulović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

Recenzenti: dr Jovanka Pantović, redovni profesor Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu

dr Maja Pech, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

Izdavač: Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu

Štampa: Sajnos, Novi Sad

Tiraž: 100

CIP - Каталогизација у публикацији
Библиотеке Матице српске, Нови Сад

514.123(075.8)

МАШУЛОВИЋ, Драган, 1969-
Analitička geometrija za informatičare / Dragan Mašulović. - Novi Sad : Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, 2019 (Novi Sad : Sajnos). - 165 str. : ilustr. ; 30 cm

Tiraž 100. - Bibliografija. - Registar.

ISBN 978-86-7031-475-7

а) Аналитичка геометрија

COBISS.SR-ID 329221639

Predgovor

Ovaj udžbenik je namenjen pre svega studentima osnovnih akademskih studija koji na smeru Informacione tehnologije na Departmanu za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu slušaju predmet Analitička geometrija, mada može biti interesantan i studentima drugih studijskih programa, kao i starijim srednjoškolcima.

Analitička geometrija je disciplina koja geometrijske probleme opisuje i rešava algebarskim jezikom i algebarskim sredstvima. Tako se objekti kao što su prava ili krug opisuju jednačinama, dok se određivanje tačaka preseka dva objekta svodi na rešavanje odgovarajućih sistema jednačina. Na taj način analitička geometrija obezbedjuje jezik i alate kojima se rešenja odgovarajućih geometrijskih problema mogu formulisati na način prihvatljiv za računske mašine.

Udžbenik pred vama je koncipiran kao zaokružen kurs, mada se od čitaoca očekuje da vlada elementarnim geometrijskim veštinama na nivou prve dve godine srednje škole, kao i osnovnim elementima programiranja u programskom jeziku Java. Prilikom odabira materijala koji će biti uključen u kurs poseban naglasak je stavljen na koncepte koji su potrebni za efikasno izvođenje nastave iz predmeta Računarska grafika 1 koji se izvodi na osnovnim akademskim studijama na smeru Informacione tehnologije, i Računarska grafika 2 koji se izvodi na master akademskim studijama na smeru Informacione tehnologije.

Kurs je podeljen u četiri glave, a svaka se završava operacionalizacijom teorijskih koncepata koji su u toj glavi razmatrani u vidu konkretnog Java koda, kao i izborom zadataka za vežbu. Cilj navedenih Java kodova je da se čitaocu demonstriraju algoritamska rešenja elementarnih geometrijskih problema. Tako je čitaocu na jednostavnim primerima predočen kompletan put algoritamskog rešavanja geometrijskih problema:

geometrijski problem $\rightarrow$ algebarski model $\rightarrow$ algoritamsko rešenje.

U Glavi 1 se podsećamo nekih osnovnih algebarskih veština koje će nam trebati za dalji rad u oblasti analitičke geometrije. Budući da se presek dva geometrijska objekta u jeziku analitičke geometrije svodi na određivanje rešenja nekih algebarskih jednačina kao i sistema linearnih jednačina, prvo se podsećamo osnovnih strategija za njihovo rešavanje. Podsetićemo se pojma determinante i matrice i pokazaćemo kako se oni koriste za rešavanje sistema linearnih jednačina. Nakon toga se podsećamo elemenata vektorskog računa, čije tehnike demonstriramo na problemu podele duži u datom odnosu i na problemu određivanja težišta konačnog skupa tačaka. Kao prirodno uopštenje ove geometrijske situacije uvodimo pojam i osnovne osobine (realnog) vektorskog prostora. Na kraju, operacionalizujemo pojam afine i linearne transformacije u obliku klasa Affine2D i Affine3D čije implementacije dajemo na kraju glave.

U Glavi 2 razvijamo ključne elemente analitičke geometrije u ravni. Nakon što koordinatizujemo ravan i pokažemo kako se vektorima dodeljuju koordinate uvodimo osnovne operacije sa vektorima i izvodimo nekoliko jednostavnih ali važnih formula (rastojanje tačaka u ravni i površina trougla). Potom uvodimo skalarni proizvod vektora kao moćno oruđe koje nam omogućuje da u ravni merimo rastojanja i uglove. Centralni deo glave predstavlja diskusija o tri oblika jednačine prave (normalni, parametarski i eksplicitni) i o odnosima osnovnih objekata u ravni. Sledi kratka diskusija o poligonima čiji osnovi cilj je izvođenje formule za označenu površinu poligona. Potom dajemo analitički oblik najvažnijih transformacija ravni. Glavu završavamo operacionalizacijom uvedenih teorijskih koncepata u vidu klasa Point2D, Line2D i Polygon2D koje implementiraju rad sa tačkama, pravim i poligonima u ravni.

Glava 3 je posvećena ključnim elementima analitičke geometrije u prostoru. Glavu počinjemo tako što koordinatizujemo prostor i pokažemo kako se vektorima dodeljuju koordinate. Uvodimo osnovne operacije sa vektorima i odmah prelazimo na osnovni računski alat: skalarni, vektorski i mešoviti proizvod vektora u prostoru. Nakon toga uvodimo parametarski oblik jednačine prave i normalni oblik jednačine ravni i diskutujemo uzajamne odnose tačaka, pravih i ravni u prostoru. Potom dajemo analitički oblik najvažnijih transformacija prostora (translacija, centralna simetrija, ravanska simetrija, homotetija i rotacija oko koordinatnih osa). Poglavlje koje sledi opisuje osnovne tehnike projektovanja, procesa kojim se prostor preslikava na ravan na „razuman način”, dok poglavlje nakon toga uvodi kvaternione koji nam omogućuju da na jednostavan način opišemo rotaciju oko proizvoljne prave u prostoru. Glavu završavamo operacionalizacijom uvedenih teorijskih koncepata u vidu klasa Quaternion, Point3D, Line3D i Plane3D koje implementiraju rad sa kvaternionima, tačkama, pravim i ravnima u prostoru.

U Glavi 4 ćemo upoznati i detaljno ispitati osnovne tipove krivih drugog reda u ravni: krug, elipsu, hiperbolu i parablu. Potom ćemo izvršiti klasifikaciju krivih drugog reda u ravni i pokazati da su, osim nekoliko degenerisanih slučajeva, prethodnim spiskom obuhvaćene sve netrivijalne mogućnosti. Na kraju glave pokazujemo zašto se krive drugog reda u ravni zovu još i konusni preseci. Algoritamsko rezonovanje u vezi sa krivim drugog reda predstavlja jedan od ozbiljnih problema savremenog računarstva i zato glavu završavamo implementacijom koja operacionalizuje samo one teorijske koncepte koji se odnose na krug u vidu klase Circle2D.

Veliku zahvalnost dugujem recenzentkinjama ovog udžbenika, dr Jovanki Pantović i dr Maji Pech, koje su pažljivo pročitale tekst, ukazale mi na veliki broj propusta, i svojim komentarima značajno doprinele jasnoći prezentacije. Naravno, odgovornost je samo moja za sve greške koje su uspele da se provuku u finalnu verziju teksta.

U Novom Sadu, Dragan Mašulović
februar 2019.

Sadržaj

1 Uvod

U ovoj glavi ćemo se podsetiti nekih osnovnih algebarskih veština koje će nam trebati za dalji rad u oblasti analitičke geometrije. Budući da se presek dva geometrijska objekta u jeziku analitičke geometrije svodi na određivanje rešenja nekih algebarskih jednačina kao i sistema linearnih jednačina, prvo ćemo se podsetiti osnovnih strategija za njihovo rešavanje. Podsetićemo se pojma determinante i matrice i pokazaćemo kako se oni koriste za rešavanje sistema linearnih jednačina. Nakon toga se podsećamo elemenata vektorskog računa, čije tehnike demonstriramo na problemu podele duži u datom odnosu i na problemu određivanja težišta konačnog skupa tačaka. Kao prirodno uopštenje ove geometrijske situacije uvodimo pojam i osnovne osobine (realnog) vektorskog prostora. Na kraju, operacionalizujemo pojam afine i linearne transformacije u obliku klasa Affine2D i Affine3D čije implementacije dajemo na kraju glave.

1.1 Algebarske jednačine

Algebarska jednačina je jednačina oblika

$$P(x,y,\dots,z) = 0$$

gde je $P(x,y,\dots,z)$ polinom sa realnim koeficijentima, a $x,y,\dots,z$ su *promenljive* ili *nepoznate*. *Stepen algebarske jednačine* je najveći stepen monoma koji se javlja u jednačini. Na primer, $3x-6=0$ je jednačina prvog stepena, kažemo još i *linearna jednačina*, sa jednom nepoznatom; $2x-y-1=0$ je linearna jednačina sa dve nepoznate; $x^2-3x+5=0$ je jednačina drugog stepena, kažemo još i *kvadratna jednačina*, sa jednom nepoznatom; $x^2+y^2-3x-4y-12=0$ je kvadratna jednačina sa dve nepoznate; $2x-y+z=-5$ je linearna jednačina sa tri nepoznate.

Postoje i jednačine koje nisu algebarske (na primer, $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}=1$), ali se rešavanjem takvih jednačina bave druge oblasti matematike.

Rešiti jednačinu $P(x,y,\dots,z)=0$ u nekom skupu brojeva S znači odrediti sve moguće torke $(a,b,\dots,c)$ elemenata skupa S koje *zadovoljavaju datu jednačinu*, odnosno za koje je $P(a,b,\dots,c)=0$. Jednačina može imati proizvoljno mnogo, čak i beskonačno mnogo rešenja. Na primer, jednačina $x^2-2=0$ ima dva rešenja u $\mathbb{R}$, ali nema rešenja u $\mathbb{Q}$, dok jednačina $x^2+y^2-1=0$ ima beskonačno mnogo rešenja u $\mathbb{R}$, a tačno četiri rešenja u $\mathbb{Z}$: $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,-1)$ i $(0,1)$.

Neke algebarske jednačine možemo veoma lako da rešimo, neke imaju komplikovana rešenja, a neke mi, homo sapiensi, uopšte ne umemo da rešimo. Sada ćemo se kratko podsetiti dve klase jednačina koje se izuzetno lako rešavaju.

Linearna jednačina sa jednom nepoznatom je jednačina oblika

$$ax+b=0,$$

gde je $a,b\in\mathbb{R}$.

- Ako je $a\neq 0$ jednačina ima tačno jedno rešenje $x=-\frac{b}{a}$;
- ako je $a=0$ i $b\neq 0$ jednačina nema rešenja u $\mathbb{R}$, a
- ako je $a=b=0$ jednačina ima beskonačno mnogo rešenja u $\mathbb{R}$ (štaviše, svaki relani broj je tada rešenje jednačine).

Kvadratna jednačina sa jednom nepoznatom je jednačina oblika

$$ax^2+bx+c=0,$$

gde je $a,b,c\in\mathbb{R}$. Neka je $D=b^2-4ac$ *diskriminanta* ove jednačine.

- Ako je $a\neq 0$ i $D<0$ jednačina nema rešenja u $\mathbb{R}$;
- ako je $a\neq 0$ i $D=0$, jednačina ima tačno jedno rešenje $x=-\frac{b}{2a}$, a
- ako je $a\neq 0$ i $D>0$, jednačina ima tačno dva rešenja u $\mathbb{R}$ koja su data poznatim obrascem $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.
- Ako je $a=0$ slučaj se svodi na linearnu jednačinu sa jednom nepoznatom.

1.2 Dve jednačine sa dve nepoznate

Sistem jednačina je niz jednačina (preciznije, njihova konjunkcija) kojima tražimo zajednička rešenja. Na primer,

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=9\\ x+\ y+\ z&=0 \end{aligned}$$

je jedan sistem jednačina. Kažemo da je to *sistem dve jednačine sa tri nepoznate*. Ako su sve jednačine u sistemu linearne, onda je to *sistem linearnih jednačina*. Prethodni sistem je sistem jedne linearne i jedne kvadratne jednačine.

Primer. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x + \quad y &= 1 \\ x^2 + 2y^2 &= 2. \end{aligned}$$

Rešenje. Ako iz linearne jednačine izrazimo x dobijamo $x = 1 - y$. Uvrštavanjem ovako dobijenog izraza za x u kvadratnu jednačinu dobijamo jednačinu $(1-y)^2 + 2y^2 = 2$ po y čija rešenja su $y_1 = 1$ i $y_2 = -\frac{1}{3}$. Dakle, rešenja polaznog sistema su $(x,y) = (0,1)$ i $(x,y) = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$. $\square$

Sistem dve linearne jednačine sa dve nepoznate u opštem slučaju izgleda ovako:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= k_1 \\ a_2x + b_2y &= k_2 \end{aligned} \qquad (*)$$

i može se veoma lako rešiti. Jedna strategija za rešavanje sistema $(*)$ se sastoji u tome da se rešavanje sistema svede na rešavanje jedne linearne jednačine tako što se iz jedne jednačine sistema izrazi jedna nepoznata i uvrsti u drugu jednačinu sistema.

Primer. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 4x + 7y &= 8. \end{aligned}$$

Rešenje. Ako iz druge jednačine izrazimo x dobijamo $x = -\frac{7}{4}y + 2$. Uvrštavanjem ovako dobijenog izraza za x u prvu jednačinu dobijamo jednačinu $2(-\frac{7}{4}y + 2) + 3y = 5$ po y čije rešenje je $y = -2$, i sada se lako nalazi da je $x = \frac{11}{2}$. $\square$

Druga strategija za rešavanje sistema $(*)$ se sastoji u tome da se sistem *transformiše* tako da dobijemo novi sistem koji ima ista rešenja kao prethodni, a koji je jednostavniji za rešavanje. Ključna napomena ovde je da novodobijeni sistem *mora imati isti skup rešenja* kao polazni sistem. Ukoliko dva sistema jednačina imaju isti skup rešenja, kažemo da su *ekvivalentni*, a za odgovarajuće transformacije kažemo da su *ekvivalentne transformacije*.

Teorema 1. *Neka je S sistem dve linearne jednačine sa dve nepoznate $(*)$, neka je S' sistem dobijen od S tako što je jedna jednačina sistema S pomnožena realnim brojem $\alpha \neq 0$:*

$$\begin{aligned} a_1x + \quad b_1y &= \quad k_1 \\ \alpha a_2x + \alpha b_2y &= \alpha k_2 \end{aligned}$$

i neka je S'' sistem dobijen od S tako što je jednoj jednačini sistema dodata druga prethodno pomnožena realnim brojem β:

$$\begin{aligned} a_1x + \qquad\qquad b_1y &= k_1 \\ (\beta a_1 + a_2)x + (\beta b_1 + b_2)y &= \beta k_1 + k_2 \end{aligned}$$

Tada su S, S' i S'' ekvivalentni sistemi.

Dokaz. Lako se pokazuje da su S i S' ekvivalentni sistemi. Dokažimo da su S i S'' ekvivalentni. Jasno, ako je (u,v) rešenje sistema S onda je (u,v) rešenje i sistema S''. Pretpostavimo, sada, da je (u,v) rešenje sistema S'', odnosno da je

$$\begin{aligned} a_1u + \qquad\quad b_1v &= k_1 \\ (\beta a_1 + a_2)u + (\beta b_1 + b_2)v &= \beta k_1 + k_2. \end{aligned}$$

Odakle lako vidimo da (u,v) zadovoljava prvu jednačinu sistema S. Ako prvu jednačinu pomnožimo sa β, a u drugoj prerasporedimo sabirke dobićemo:

$$\begin{aligned} \beta a_1u + \qquad \beta b_1v &= \beta k_1 \\ (\beta a_1u + \beta b_1v) + (a_2u + b_2v) &= \beta k_1 + k_2. \end{aligned}$$

Sada ćemo prvu jednačinu uvrstiti u drugu:

$$\begin{aligned} \beta a_1u + \qquad \beta b_1v &= \beta k_1 \\ \beta k_1 + (a_2u + b_2v) &= \beta k_1 + k_2, \end{aligned}$$

odakle lako zaključujemo da je

$$a_2u + b_2v = k_2.$$

Dakle, (u,v) zadovoljava i drugu jednačinu sistema S. ■

Prema tome, množenje jedne jednačine sistema brojem koji nije nula, i dodavanje jednoj jednačini sistema druge jednačine koja je prethodno pomnožena nekim brojem su dve ekvivalentne transformacije sistema linearnih jednačina. Ove transformacije se mogu koristiti za efikasno rešavanje sistema linearnih jednačina, pogotovo ako se radi o sistemima više jednačina sa više nepoznatih, o čemu ćemo govoriti kasnije u kursu.

Primer. Ponovo rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 4x + 7y &= 8 \end{aligned}$$

transformisanjem u njemu ekvivalentni.

Rešenje. Prvu jednačinu sistema pomnožimo sa -2 i dodamo drugoj jednačini i tako dobijamo novi sistem

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ y &= -2. \end{aligned}$$

koji je ekvivalentan polaznom, što znači da imaju ista rešenja. Iz novog sistema odmah vidimo da je $y = -2$, dok se vrednost promenljive x sada lako računa iz prve jednačine. □

Prethodni primer je ujedno bio i primer sistema linearnih jednačina koji ima tačno jedno rešenje. Neki sistemi linearnih jednačina nemaju rešenje, recimo ovaj:

$$\begin{aligned} 2x+3y &= 5 \\ 2x+3y &= 6, \end{aligned}$$

dok drugi mogu imati beskonačno mnogo rešenja, kao što je slučaj sa ovim sistemom:

$$\begin{aligned} 2x+3y &= 5 \\ 4x+6y &= 10. \end{aligned}$$

Za sistem linearnih jednačina kažemo da je *nemoguć* ako nema rešenja, da je *neodređen* ako ima više od jednog rešenja, i da je *određen* ako ima tačno jedno rešenje. Kasnije ćemo pokazati da ako je sistem linearnih jednačina neodređen, onda ima beskonačno mnogo rešenja!

1.3 Determinante reda 2

Posmatrajmo ponovo sistem dve linearne jednačine sa dve nepoznate

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y &= k_1 \\ a_2x+b_2y &= k_2 \end{aligned} \tag{$*$}$$

Ako je $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$, njegova rešenja u opštem slučaju su data sa

$$x = \frac{k_1b_2-k_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \quad \text{i} \quad y = \frac{a_1k_2-a_2k_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

Ako uvedemo oznaku

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-cb$$

onda rešenja sistema možemo zapisati na sledeći način:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{i} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},$$

naravno, pod pretpostavkom da je $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$. Broj $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-cb$ zovemo *determinanta reda 2*. Primetimo da $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ predstavlja način da se od tabele brojeva 2×2 dobije novi broj.

Broj $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ se zove *determinanta sistema* $(*)$; broj $D_x = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}$ se zove *determinanta po x*, a broj $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix}$ *determinanta po y*. Determinante po x i y se dobijaju tako što se u determinanti sistema odgovarajuća kolona zameni kolonom koju čine slobodni članovi u jednačinama. Rešenja sistema $(*)$ se uz ovako uvedene oznake i pretpostavku $D \neq 0$ kompaktno zapisuju na sledeći način:

$$x = \frac{D_x}{D} \quad \text{i} \quad y = \frac{D_y}{D}.$$

Prema tome, ako je $D \neq 0$ sistem $(*)$ je određen i jedinstveno rešenje sistema je dato prethodnim izrazima. Ako je, međutim, $D = 0$ onda je sistem $(*)$ nemoguć ili neodređen. U slučaju $D = 0$ potrebno je izvršiti dodatne analize da bi se utvrdilo da li je sistem nemoguć ili neodređen.

Primer. Diskutovati rešenja sledećeg sistema jednačina u zavisnosti od vrednosti parametra $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} kx + \quad 2y &= 1 \\ x + (k-1)y &= k. \end{aligned}$$

Rešenje. Determinanta sistema je

$$D = \begin{vmatrix} k & 2 \\ 1 & k-1 \end{vmatrix} = k^2 - k - 2 = (k-2)(k+1),$$

dok su determinante po x i po y date sa

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ k & k-1 \end{vmatrix} = -1 - k,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 1.$$

Dakle, za $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ sistem je određen i njegovo rešenje je

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{2-k}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{1-k}{2-k},$$

dok slučajeve $k = -1$ i $k = 2$ razmatramo posebno. Za $k = -1$ dobijamo sistem:

$$\begin{aligned} -x + 2y &= 1 \\ x - 2y &= -1. \end{aligned}$$

koji je neodređen i sva njegova rešenja imaju oblik $x = 2t - 1$, $y = t$ za $t \in \mathbb{R}$. Za $k = 2$ dobijamo sistem

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 1 \\ x + \ y &= 2 \end{aligned}$$

za koga se lako vidi da je nemoguć. $\square$

1.4 Tri linearne jednačine sa tri nepoznate

Sistem tri linearne jednačine sa tri nepoznate u opštem slučaju izgleda ovako:

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=k_1\\ a_2x+b_2y+c_2z&=k_2\\ a_3x+b_3y+c_3z&=k_3. \end{aligned} \tag{$**$}$$

Sistem $(**)$ se može rešiti tako što se iz jedne jednačine sistema izrazi jedna nepoznata i uvrsti u preostale dve jednačine, i time se problem svede na rešavanje sistema dve linearne jednačine sa dve nepoznate. Ovo je, međutim, veoma neefikasna strategija pa se sistemi koji se sastoje od tri i više linearnih jednačina sa tri i više nepoznatih uglavnom rešavaju primenom ekvivalentnih transformacija sa ciljem da se u svakom koraku dobije „jednostavniji” sistem. Dokaz sledeće teoreme je analogan dokazu Teoreme 1 pa ga zato ne navodimo.

Teorema 2. *Neka je S sistem tri linearne jednačine sa tri nepoznate $(**)$, neka je S' sistem dobijen od S tako što je jedna jednačina sistema S pomnožena nekim realnim brojem $\alpha \neq 0$:*

$$\begin{aligned} a_1x+\ \ b_1y+\ \ c_1z&=k_1\\ \alpha a_2x+\alpha b_2y+\alpha c_2z&=\alpha k_2\\ a_3x+\ \ b_3y+\ \ c_3z&=k_3, \end{aligned}$$

i neka je S'' sistem dobijen od S tako što je jednoj jednačini sistema dodata druga prethodno pomnožena nekim realnim brojem β:

$$\begin{aligned} a_1x+\qquad\quad b_1y+\qquad\quad c_1z&=k_1\\ (\beta a_1+a_2)x+(\beta b_1+b_2)y+(\beta c_1+c_2)z&=\beta k_1+k_2\\ a_3x+\qquad\quad b_3y+\qquad\quad c_3z&=k_3. \end{aligned}$$

Tada su S, S' i S'' ekvivalentni sistemi. ■

Gausov metod eliminacije predstavlja veoma efikasnu proceduru za rešavanje sistema linearnih jednačina (koju je, naravno, predložio čuveni nemački matematičar Karl Fridrih Gaus – odatle ime). Umesto apstraktnog objašnjenja demonstriraćemo Gausov metod eliminacije na jednom primeru.

Primer. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} 4x+y+4z&=-2\\ 2x-y+2z&=-4\\ x+y+2z&=-1. \end{aligned}$$

Rešenje. Napisaćamo jednačine sistema drugim redom, tako da na prvo mesto dovedemo ,,najjednostavniju" jednačinu:

$$\begin{aligned} x+y+2z &= -1\\ 4x+y+4z &= -2\\ 2x-y+2z &= -4, \end{aligned}$$

a onda ćemo tu jednačinu množiti raznim pogodno odabranim brojevima i tako pomnoženu dodavati ostalim jednačinama sistema kako bismo uklonili sva pojavljivanja promenljive x osim onog u prvoj jednačini. Prvu jednačinu sistema ćemo, prvo, pomnožiti sa -4 i dodati drugoj, a onda ćemo je pomnožiti sa -2 i dodati trećoj:

$$\begin{aligned} x+y+2z &= -1 \qquad (-4)\\ 4x+y+4z &= -2 \qquad (-2)\\ 2x-y+2z &= -4. \end{aligned}$$

Tako dobijamo novi sistem:

$$\begin{aligned} x+y+2z &= -1\\ -3y-4z &= 2\\ -3y-2z &= -2, \end{aligned}$$

u kome nijedna jednačina ispod prve ne sadrži promenljivu x. Sada ćemo na isti način upotrebiti drugu jednačinu da uklonimo sva pojavljivanja promenljive y osim onih u prve dve jednačine. Dakle, drugu jednačinu ćemo pomnožiti sa -1 i dodati trećoj:

$$\begin{aligned} x+y+2z &= -1\\ -3y-4z &= 2 \qquad (-1)\\ -3y-2z &= -2. \end{aligned}$$

Dobijamo novi, još jednostavniji sistem:

$$\begin{aligned} x+y+2z &= -1\\ -3y-4z &= 2\\ 2z &= -4. \end{aligned}$$

Početni sistem smo tako sveli na *trougaoni oblik* odakle se lako dobijaju rešenja sistema. Iz treće jednačine dobijamo $z=-2$, pa kada taj podatak uvrstimo u prve dve jednačine sistem postaje

$$\begin{aligned} x+y &= 3\\ -3y &= -6. \end{aligned}$$

Iz druge jednačine dobijamo $y = 2$, pa iz prve imamo $x = 1$. Dakle, sistem je određen i njegovo jedinstveno rešenje je $(x,y,z) = (1,2,-2)$. □

Primer. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x+y+2z &= -1 \\ 2x-y+2z &= -4 \\ 4x+y+6z &= -2. \end{aligned}$$

Rešenje. Prvu jednačinu pomnožimo sa -2 i dodamo drugoj, a onda je pomnožimo sa -4 i dodamo trećoj jednačini, i tako dobijamo ekvivalentan sistem:

$$\begin{aligned} x+y+2z &= -1 \\ -3y-2z &= -2 \\ -3y-2z &= 2. \end{aligned}$$

Potom drugu jednačinu pomnožimo sa -1 i dodamo trećoj i tako dobijamo sistem

$$\begin{aligned} x+y+2z &= -1 \\ -3y-2z &= -2 \\ 0 &= 4. \end{aligned}$$

Ovaj sistem očito nema rešenja, što znači da ni polazni sistem nema rešenja. □

Primer. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x+2y+z &= -1 \\ 2x+2y-z &= -4 \\ 4x+6y+z &= -6. \end{aligned}$$

Rešenje. Prvu jednačinu pomnožimo sa -2 i dodamo drugoj, a onda je pomnožimo sa -4 i dodamo trećoj jednačini, i tako dobijamo ekvivalentan sistem:

$$\begin{aligned} x+y+2z &= -1 \\ -2y-3z &= -2 \\ -2y-3z &= -2. \end{aligned}$$

Poslednje dve jednačine u sistemu su identične, tako da jednu možemo da odbacimo, pa dobijamo sledeći sistem *dve linearne jednačine sa tri nepoznate*:

$$\begin{aligned} x+y+2z &= -1 \\ -2y-3z &= -2. \end{aligned}$$

Promenljiva z može imati proizvoljnu vrednost. Zato stavimo da je $z=t$ za neko $t\in\mathbb{R}$, pa dalje rešavamo sistem kao i ranije: iz druge jednačine je $y=1-\frac{3}{2}t$, dok iz prve jednačine dobijamo $x=-2-\frac{1}{2}t$. Dakle, sistem je neodređen, a rešenja imaju oblik $(x,y,z)=(-2-\frac{1}{2}t,1-\frac{3}{2}t,t)$, $t\in\mathbb{R}$. $\square$

Prethodnim primerima smo pokazali da Gausov metod eliminacije ne samo što može da reši sistem, odnosno, odluči da li se radi o nemogućem ili neodređenom sistemu, već u slučaju da je sistem neodređen dobijamo i detaljnu strukturu rešenja.

U poslednjem primeru smo imali primer neodređenog sistema *sa jednim stepenom slobode*, što znači da smo vrednost jedne promenljive mogli proizvoljno da biramo, ali su time vrednosti ostalih promenljivih bile jednoznačno određene. Za kraj dajemo primer neodređenog sistema sa *dva stepena slobode*, gde proizvoljno možemo da biramo vrednosti dve promenljive.

Primer. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x+2y+z &= -1 \\ 2x+4y+2z &= -2 \\ 3x+6y+3z &= -3. \end{aligned}$$

Rešenje. Prvu jednačinu pomnožimo sa -2 i dodamo drugoj, a onda je pomnožimo sa -3 i dodamo trećoj jednačini, i tako dobijamo ekvivalentan sistem:

$$\begin{aligned} x+2y+z &= -1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Sada promenljive y i z mogu imati proizvoljne *nezavisne* vrednosti. Zato stavimo da je $z=t$ i $y=s$ za neke $s,t\in\mathbb{R}$, pa iz prve jednačine dobijamo $x=-1-2s-t$. Dakle, sistem je neodređen, a rešenja imaju oblik $(x,y,z)=(-1-2s-t,s,t)$, $s,t\in\mathbb{R}$. $\square$

1.5 Determinante reda 3

Determinanta reda 3 predstavlja način da se od tabele sa 3×3 brojeva dobije novi broj na sledeći način:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - \\ -a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1. \end{array}$$

Postoji jednostavno pravilo (tzv. *Sarusovo pravilo*) da se na osnovu tabele 3×3 izračuna vrednost odgovarajuće determinante. *Ono radi samo u slučaju determinante reda tri* i izgleda ovako: pođemo od determinante reda 3 i dopišemo zdesna prve dve kolone. Potom, „glavne” dijagonale množimo i uzimamo sa znakom „$+$”, a „sporedne” dijagonale množimo i uzimamo sa znakom „$-$”.

Sarusovo pravilo

1. korak:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

2. korak:

$$\begin{matrix} + & + & + \\ \searrow & \searrow & \searrow \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

3. korak:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ - & - & - \end{matrix}$$

Neke osobine determinanti reda 3. Direktnim računanjem se lako pokazuje da determinante reda 3 imaju sledeće osobine:

1. Ako su svi elementi neke vrste ili kolone determinante jednaki nuli, vrednost determinante je 0:
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Ako su svi elementi ispod glavne dijagonale determinante jednaki nuli, vrednost determinante jednaka je proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali:
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = adf.$$

3. Vrednost determinante se ne menja ako vrste i kolone determinante zamene mesta tako da prva vrsta postane prva kolona, druga vrsta postane druga kolona, a treća vrsta postane treća kolona:
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4. Ako dve vrste ili dve kolone determinante zamene mesta, menja se znak determinante. Na primer,
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

5. Ako se jedna vrsta ili jedna kolona determinante pomnoži brojem α, vrednost determinante se uvećava α puta. Na primer,

$$\alpha \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 & \alpha c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

6. Vrednost determinante se ne menja ako jednu njenu vrstu (ili kolonu) prethodno pomnoženu nekim brojem dodamo nekoj drugoj vrsti (ili koloni). Na primer,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot k = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 + a_2 & kb_1 + b_2 & kc_1 + c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

7. Ako su dve vrste ili dve kolone determinante jednake, vrednost determinante je 0. Na primer,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Iste ove osobine imaju i determinante reda 2, što se lako proverava direktnim računanjem.

Primer. Izračunati vrednost determinante $D = \begin{vmatrix} 14378 & 14253 & 14127 \\ 14377 & 14252 & 14126 \\ 14376 & 14376 & 14376 \end{vmatrix}$.

Rešenje. Primetimo, prvo, da su u poslednjoj vrsti determinante svi brojevi jednaki, tako da je

$$D = 14376 \cdot \begin{vmatrix} 14378 & 14253 & 14127 \\ 14377 & 14252 & 14126 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ako sada drugu vrstu pomnoženu sa -1 dodamo prvoj, dobijamo:

$$D = 14376 \cdot \begin{vmatrix} 14378 & 14253 & 14127 \\ 14377 & 14252 & 14126 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} (-1)$$

$$= 14376 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 14377 & 14252 & 14126 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Dakle, $D = 0$ pošto poslednja determinanta ima dve jednake vrste. □

Primer. Izračunati vrednost determinante $D = \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

Rešenje. Ako drugu i treću vrstu dodamo prvoj, dobijamo:

$$D = \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(x+y) & 2(x+y) & 2(x+y) \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

$$= 2(x+y) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}.$$

Sada ćemo prvu vrstu pomnožiti sa $-y$ i dodati drugoj, a onda sa $-x-y$ i dodati trećoj:

$$D = 2(x+y) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-y) \\ (-x-y) \end{matrix} = 2(x+y) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x-y \\ 0 & -y & -x \end{vmatrix}.$$

Poslednja determinanta se lako može izračunati pomoću Sarusovog pravila, tako da dobijamo:

$$D = 2(x+y)(-x^2+xy-y^2) = -2(x^3+y^3). \ \square$$

Razvoj determinante reda 3 po elementima neke vrste ili kolone. Ako u definiciji determinante reda 3 pregrupišemo elemente ovako:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

vidimo da se determinanta reda 3 može predstaviti preko tri determinante reda dva:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Ovaj identitet se zove *razvoj determinante po elementima prve vrste*.

Sličan identitet se može izvesti ne samo za svaku vrstu determinante, već i za svaku kolonu. Na primer, razvoj determinante po elementima druge, odnosno treće vrste izgleda ovako:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

dok razvoj determinante po elementima prve, druge, odnosno, treće kolone izgleda ovako:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Ovi identiteti se mogu veoma jednostavno zapamtiti: prilikom razvoja determinante po elementima neke vrste ili kolone, element se množi determinantom reda dva koja ostane kada se iz velike determinante izbace njegova vrsta i kolona, a znak se uzima prema položaju tog elementa na „šahovskoj tabli” koja je data pored. Evo još jednom razvoja determinante reda tri po elementima druge kolone:

$$\begin{vmatrix} a_1 & \boxed{b_1} & c_1 \\ a_2 & \boxed{b_2} & c_2 \\ a_3 & \boxed{b_3} & c_3 \end{vmatrix} = -\, b_1 \underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} + \; b_2 \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} - \; b_3 \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}_{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Primer. Izračunati vrednost Vandermondove determinante $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

Rešenje. Ako prvu vrstu pomnožimo sa $-a$ i dodamo drugoj vrsti, a potom je pomnožimo sa $-a^2$ i dodamo trećoj vrsti, dobijamo

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}.$$

Nakon razvoja ove determinante po elementima prve kolone dobijamo:

$$\begin{aligned} D &= 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\ &= (b-a) \begin{vmatrix} 1 & c-a \\ b+a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)(c-b). \quad \square \end{aligned}$$

Sistemi tri linearne jednačine sa tri nepoznate i determinante reda 3. Posmatrajmo ponovo sistem tri linearne jednačine sa tri nepoznate u opštem slučaju:

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=k_1\\ a_2x+b_2y+c_2z&=k_2\\ a_3x+b_3y+c_3z&=k_3 \end{aligned} \qquad (**)$$

i neka su

$$D_x=\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1\\ k_2 & b_2 & c_2\\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1\\ a_2 & k_2 & c_2\\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1\\ a_2 & b_2 & k_2\\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix},$$

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

determinante koje, redom, zovemo *determinanta po x*, *determinanta po y*, *determinanta po z* i *determinanta sistema*.

Teorema 3. *Ako za sistem $(**)$ znamo da je $D\neq 0$, tada je sistem određen i njegovo jedinstveno rešenje je dato sa*

$$x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D},\quad z=\frac{D_z}{D}.$$

Dokaz. Kada prvu jednačinu sistema $(**)$ pomnožimo sa $\begin{vmatrix} b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}$, drugu pomnožimo sa $-\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}$, treću sa $\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}$ i sve to saberemo, dobijamo:

$$\begin{aligned} &\left(a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\right)x+\\ &\left(b_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-b_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\right)y+\\ &\left(c_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\right)z=\\ &=k_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-k_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+k_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Koristeći razvoj determinante reda 3 po elementima prve kolone, prethodna jednačina se može zapisati ovako:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1\\ b_2 & b_2 & c_2\\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1\\ c_2 & b_2 & c_2\\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}z=\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1\\ k_2 & b_2 & c_2\\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Svaka od determinanti koje množe y i z ima dve jednake kolone, pa su obe jednake nuli. Tako ostaje

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

odnosno,

$$D \cdot x = D_x.$$

Kako je $D \neq 0$ dobijamo $x = \dfrac{D_x}{D}$. Na isti način se dobija da je $y = \dfrac{D_y}{D}$ i $z = \dfrac{D_z}{D}$. ■

Ako je $D = 0$ sistem $(**)$ je nemoguć ili neodređen. Mi sada nemamo dovoljno teorijskog alata da ovaj stav i pokažemo. Zato ćemo dokaz dati kasnije, i to za opštiji slučaj.

Kada je determinanta sistema $(**)$ jednaka nuli potrebno je izvršiti dodatne analize da bi se utvrdilo da li je sistem nemoguć ili neodređen. Evo primera:

Primer. Diskutovati rešenja sledećeg sistema jednačina u zavisnosti od vrednosti parametra $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x + y + z &= \frac{1}{2}k(3-k) \\ 2x + (3-k)y + 2z &= 2 \\ 3x + (4-k)y + (3 + (k-1)(k-2)(k-3))z &= 3. \end{aligned}$$

Rešenje. Izračunajmo, prvo, determinantu sistema:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3-k & 2 \\ 3 & 4-k & 3+(k-1)(k-2)(k-3) \end{vmatrix}$$

Prvu vrstu determinante pomnoženu sa -2 dodamo drugoj vrsti, a onda je pomnoženu sa -3 dodamo trećoj vrsti. Tako dobijamo da je

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & (k-1)(k-2)(k-3) \end{vmatrix},$$

odakle, razvojem po elementima druge vrste dobijamo

$$D = (1-k)(k-1)(k-2)(k-3).$$

Dakle, za $k \in \mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ sistem je određen i standardnim postupkom se može dobiti njegovo rešenje:

$$x = -\frac{1}{2}(k-1)(k-4) - \frac{1}{(k-1)(k-2)(k-3)},$$

$$y = 2-k, \quad z = \frac{1}{(k-1)(k-2)(k-3)}.$$

Pogledajmo sada šta se dešava u slučaju $D = 0$. Za $k = 1$ dobijamo sistem

$$\begin{aligned} x+\ \ y+\ \ z &= 1 \\ 2x+2y+2z &= 2 \\ 3x+3y+3z &= 3 \end{aligned}$$

koji je ekvivalentan sistemu

$$x+y+z = 1.$$

Ovaj sistem je neodređen (sa dva stepena slobode) i njegova rešenja su

$$x = s, \quad y = t, \quad z = 1-s-t, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Za $k = 2$ dobijamo sistem

$$\begin{aligned} x+\ \ y+\ \ z &= 1 \\ 2x+\ \ y+2z &= 2 \\ 3x+2y+3z &= 3. \end{aligned}$$

Kako je treća jednačina sistema jednaka zbiru prve dve, možemo je udaljiti iz sistema bez uticaja na skup rešenja sistema, i zato je prethodni sistem je ekvivalentan sa

$$\begin{aligned} x+y+\ \ z &= 1 \\ 2x+y+2z &= 2. \end{aligned}$$

Ako drugoj jednačini dodamo prvu jednačinu pomnoženu sa -2 dobijamo ekvivalentan sistem

$$\begin{aligned} x+\ \ y+z &= 1 \\ -y &= 0. \end{aligned}$$

Ovaj sistem je neodređen (sa jednim stepenom slobode) i njegova rešenja su

$$x = t, \quad y = 0, \quad z = 1-t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Konačno, za $k = 3$ dobijamo sistem

$$\begin{aligned} x+y+\ \ z &= 0 \\ 2x+2z &= 2 \\ 3x+y+3z &= 3. \end{aligned}$$

Ako drugoj jednačini dodamo prvu jednačinu pomnoženu sa -2, a onda trećoj jednačini dodamo prvu pomnoženu sa -3 dobijamo ekvivalentan sistem

$$\begin{aligned} x+\ \ y+z &= 0 \\ -2y &= 2 \\ -2y &= 3. \end{aligned}$$

Ovaj sistem je nemoguć. $\square$

1.6 Opšta definicija determinante

U ovom odeljku ćemo dati opštu definiciju determinante reda n, $n \geqslant 2$ i navesti osnovne osobine determinanti. Za to nam je, međutim, potreban pojam permutacije.

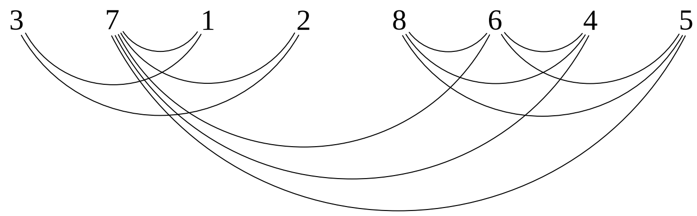
Permutacija skupa $A = \{1, 2, \dots, n\}$ je svaki niz $a_1 a_2 \dots a_n$ elemenata skupa A sa osobinom da se svaki element skupa A javlja tačno jednom u ovom nizu.

Na primer, 41372685 je jedna permutacija skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, dok 876543218 i 1234678 to nisu (u prvom nizu se element 8 javlja dva puta, dok se u drugom nizu nijednom ne pojavljuje element 5).

Skup svih permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ označavamo sa S_n.

Neka je $f = a_1 a_2 \dots a_n$ permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$. *Inverzija permutacije* f je svaka situacija u kojoj se veći broj nalazi ispred (ne nužno neposredno ispred!) manjeg broja u permutaciji. Preciznije, inverzija permutacije f je par (a_i, a_j) sa osobinom $i < j$ i $a_i > a_j$. Broj inverzija permutacije f označavamo sa $\operatorname{inv}(f)$. Za permutaciju kažemo da je *parna* ili *neparna* u zavisnosti od toga da li je $\operatorname{inv}(f)$ paran ili neparan broj.

Primer. Neka je $f = 37128645$. Inverzije permutacije f su $(3,1)$, $(3,2)$, $(7,1)$, $(7,2)$, $(7,6)$, $(7,4)$, $(7,5)$, $(8,6)$, $(8,4)$, $(8,5)$, $(6,4)$ i $(6,5)$ kako je pokazano na Sl. 1.1. Dakle, $\operatorname{inv}(f) = 12$ i ova permutacija je parna. $\square$



Slika 1.1: Sve inverzije permutacije 37128645

Teorema 4. *Ako je $n \geqslant 2$, broj parnih permutacija skupa $\{1, \dots, n\}$ jednak je broju neparnih permutacija tog skupa, i oba broja su jednaka sa $\frac{n!}{2}$.* $\blacksquare$

Permutacija $f = a_1 a_2 \dots a_n$ skupa $A = \{1, 2, \dots, n\}$ nije ništa drugo do bijektivno preslikavanje $f : A \to A$ dato sa

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Obrnuto, svako bijektivno preslikavanje $f : A \to A$ jednoznačno određuje permutaciju $f(1)\ f(2)\ \dots\ f(n)$ skupa A. Dakle, permutaciju skupa $A = \{1, 2, \dots, n\}$ možemo da predstavimo kao niz dužine n kod koga se svaki element skupa A javlja tačno jednom, ili kao bijektivnu funkciju $f : A \to A$. Od ovog trenutka nećemo praviti razliku između ove dve reprezentacije, pre svega zato što je prelazak sa jedne na drugu veoma jednostavan, kako pokazuje sledeći primer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 1 & 2 & 8 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longleftrightarrow 37128645.$$

Tretiraćemo permutacije nekad kao nizove, nekad kao bijektivne funkcije, u zavisnosti od toga šta nam je u tom trenutku pogodnije.

Definicija. Neka je $n \in \mathbb{N}$ prirodan broj. *Determinanta reda n* je algebarski izraz oblika

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{f \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(f)} a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}.$$

gde su a_{ij} proizvoljni realni brojevi, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Kraće pišemo i $D = |a_{ij}|_{n\times n}$.

Primetimo da svaki sabirak u definiciji determinante sadrži tačno jedan element svake vrste determinante, i tačno jedan element svake kolone determinante. Na primer, za $n = 5$ i $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, sabirak koji odgovara permutaciji f i elementi determinante koji kao činioci učestvuju u tom sabirku izgledaju ovako:

$$(-1)^4 a_{13}a_{21}a_{34}a_{45}a_{52} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} & a_{14} & a_{15} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \boxed{a_{34}} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \boxed{a_{45}} \\ a_{51} & \boxed{a_{52}} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Time smo pokazali sledeću osobinu determinanti:

Vrsta/kolona koja se sastoji od nula. Ako se u determinanti D neka vrsta ili kolona sastoji isključivo od nula, onda je $D = 0$.

Osim ove osobine, determinante imaju još niz važnih osobina koje koristimo da bismo efektivno odredili vrednost determinante.

Vrste postaju kolone i obrnuto. Determinanta ne menja vrednost ukoliko njene vrste postanu kolone tako da prva vrsta postane prva kolona, druga vrsta postane druga kolona, ..., poslednja vrsta postane poslednja kolona. Preciznije,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Prethodna osobina determinanti je važna zato što pokazuje da ako neka osobina determinanti važi za vrste, važi i za kolone.

Zamena mesta dvema vrstama/kolonama determinante. Neka je D' determinanta koja se dobija od determinante D tako što dve vrste (ili dve kolone) zamene mesta. Tada je $D' = -D$.

Dve jednake vrste/kolone. Ako su u determinanti D neke dve vrste jednake, ili neke dve kolone jednake, onda je $D = 0$.

Eliminacija. Vrednost determinante se ne menja ako jednu njenu vrstu, prethodno pomnoženu nekim brojem, dodamo nekoj drugoj vrsti. Analogno tvrđenje važi za kolone.

Nule ispod glavne dijagonale. Ako su u determinanti svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli, onda je vrednost determinante jednaka proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Množenje vrste/kolone brojem. Ako je determinanta D' dobijena od determinante D tako što je jedna vrsta ili kolona determinante D pomnožena nekim realnim brojem α, onda je $D' = \alpha \cdot D$.

Sabiranje determinanti.

$$\begin{array}{c} \\ \\ i \to \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1 + q_1 & p_2 + q_2 & \dots & p_n + q_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Analogno tvrđenje važi za svaku drugu vrstu, kao i za svaku kolonu determinante.

Razvoj determinante po elementima neke vrste/kolone. Neka je D determinanta reda n sa elementima a_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, i neka je $D_{(pq)}$ determinanta reda $n-1$ koja se dobija tako što se iz determinante D udalje p-ta vrsta i q-ta kolona. Tada je

$$D = \sum_{q=1}^{n} (-1)^{p+q} a_{pq} D_{(pq)},$$

za svako p (razvoj determinante D po elementima p-te vrste). Analogno,

$$D = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+q} a_{pq} D_{(pq)},$$

za svako q (razvoj determinante D po elementima q-te kolone).

Pogledajmo sada nekoliko primera.

Primer. Izračunati vrednost determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix}.$$

Rešenje. Ako drugoj vrsti determinante dodamo prvu pomnoženu sa -12, potom trećoj vrsti dodamo prvu pomnoženu sa -11, a onda četvrtoj dodamo prvu pomnoženu sa -10 dobijamo:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-12) \\ (-11) \\ (-10) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -11 & -22 & -43 \\ 0 & -6 & -18 & -38 \\ 0 & -11 & -22 & -33 \end{vmatrix}.$$

Razvijanjem po elementima prve kolone dalje imamo da je

$$D = \begin{vmatrix} -11 & -22 & -43 \\ -6 & -18 & -38 \\ -11 & -22 & -33 \end{vmatrix}.$$

Ako sada poslednju vrstu pomnožimo sa -1 i dodamo prvoj, dobijamo:

$$D = \begin{vmatrix} -11 & -22 & -43 \\ -6 & -18 & -38 \\ -11 & -22 & -33 \end{vmatrix} (-1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -10 \\ -6 & -18 & -38 \\ -11 & -22 & -33 \end{vmatrix}.$$

Razvijemo i ovu determinantu po elementima prve vrste, pa iz prve vrste „izvučemo" -6, a iz druge -11:

$$D = -10 \cdot \begin{vmatrix} -6 & -18 \\ -11 & -22 \end{vmatrix} = (-10)\cdot(-6)\cdot(-11)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Konačno, $D = 660$. $\square$

Primer. Izračunati vrednost sledeće determinante reda $n+1$:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & n & \dots & x \end{vmatrix}.$$

Rešenje. Primetimo, prvo, da je

$$D = \begin{vmatrix} 1+(-1) & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1+0 & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2+0 & 2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 3+0 & 3 & 3 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n+0 & n & n & n & \dots & x \end{vmatrix} = D_1 + D_2$$

gde je

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & n & \dots & x \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & 3 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & n & n & n & \dots & x \end{vmatrix}.$$

Razvijanjem po elementima prve kolone lako se dobija da je $D_2 = -x^n$. Da bismo izračunali D_1, drugoj vrsti dodamo prvu prethodno pomnoženu sa -1, onda trećoj vrsti dodamo prvu prethodno pomnoženu sa -2, pa četvrtoj prvu pomnoženu sa -3 itd. Lako se vidi da je

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & x-2 & -2 & \dots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & x-3 & \dots & -3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x-n \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)\dots(x-n).$$

Dakle, $D = (x-1)(x-2)\dots(x-n) - x^n$. $\square$

1.7 Pojam matrice, operacije sa matricama

Matrica je pravougaona šema brojeva čije dimenzije zovemo *format matrice*. Na primer:

Matrica:	$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 & 9 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 34 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 9 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
Format:	3×4	4×1	1×4	3×3

Matrica formata $k \times k$ zove se *kvadratna matrica*. Matrica formata $1 \times k$ zove se *vektor-vrsta*, a matrica formata $k \times 1$ *vektor-kolona*. Zapis $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ znači da je

A matrica formata $n\times m$ čiji elementi su označeni sa a_{ij}. Pri tome je $i\in\{1,\ldots,n\}$, a $j\in\{1,\ldots,m\}$.

Skup svih matrica formata $m\times n$ sa elementima iz $\mathbb{R}$ označavamo sa $\mathbb{R}^{m\times n}$. Matrice se mogu sabirati i množiti ako zadovoljavaju određene uslove. Matrice istog formata se sabiraju tako što se saberu elementi na odgovarajućim mestima:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \ldots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Kraće pišemo još i ovako:

$$[a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}.$$

Matrica se množi brojem tako što se svaki element matrice pomnoži tim brojem:

$$\alpha\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \ldots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \ldots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Kraće pišemo još i ovako:

$$\alpha\cdot[a_{ij}]_{m\times n}=[\alpha\cdot a_{ij}]_{m\times n}.$$

Primer. Za $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ je

$$2B-A=2\begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 14 & 4 \\ 3 & 9 & 0 \\ 8 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Za matrice A formata $k\times l$ i B formata $n\times m$ kažemo da su *kompatibilne* ako je $l=n$. *Proizvod* kompatibilnih matrica $A=[a_{ij}]_{k\times n}$ i $B=[b_{ij}]_{n\times m}$, pišemo $C=AB$, je matrica $C=[c_{ij}]_{k\times m}$ čiji elementi se računaju na sledeći način:

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}.$$

Ova formula praktično znači da se element na mestu (i,j) matrice C dobija tako što se i-ta vrsta matrice A „skalarno pomnoži” j-tom kolonom matrice B:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{i3} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \ldots & a_{kn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & \ldots & b_{2j} & \ldots & b_{2m} \\ b_{31} & \ldots & b_{3j} & \ldots & b_{3m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nj} & \ldots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1j} & \ldots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \ldots & c_{ij} & \ldots & c_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \ldots & c_{kj} & \ldots & c_{km} \end{bmatrix}.$$

Primer.

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 9 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ 4 & 1 \\ 0 & -15 \\ 1 & -17 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Sa E_n označavamo sledeću kvadratnu matricu reda n:

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Ukoliko je red matrice E_n jasan iz konteksta, umesto E_n pišemo samo E. Matricu E_n zovemo *jedinična matrica reda n* zato što se prilikom množenja matrica ponaša kao jedinica:

Stav 5. *Za proizvoljnu matricu A formata $m \times n$ je $AE_n = E_mA = A$.* ■

Teorema 6. *Moženje matrica je asocijativno. Preciznije, ako je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ i $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$, onda je $(AB)C = A(BC)$.* ■

Primer. Množenje matrica u opštem slučaju nije komutativno. Na primer, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, dok je $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. □

Svakoj kvadratnoj matrici $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ se prirodno dodeljuje determinanta $D = |a_{ij}|_{n\times n}$ reda n. Kažemo da je D *determinanta matrice A.*

Naredna teorema nam kaže da se determinanta „slaže" sa množenjem kvadratnih matrica istog reda u sledećem smislu: $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Teorema 7. *Neka su A i B kvadratne matrice istog reda. Tada je $|AB| = |A| \cdot |B|$.*

Dokaz. Zadovoljćemo se dokazom teoreme u slučaju kvadratnih matrica reda 2. Neka je $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$. Tada je

$$AB = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{bmatrix}$$

pa je

$$\begin{aligned}
|AB| &= \begin{vmatrix} a_1b_1+a_2b_3 & a_1b_2+a_2b_4 \\ a_3b_1+a_4b_3 & a_3b_2+a_4b_4 \end{vmatrix} \\
&= (a_1b_1+a_2b_3)(a_3b_2+a_4b_4)-(a_3b_1+a_4b_3)(a_1b_2+a_2b_4) \\
&= a_1a_3b_1b_2+a_1a_4b_1b_4+a_2a_3b_2b_3+a_2a_4b_3b_4 \\
&\quad -a_1a_3b_1b_2-a_2a_3b_1b_4-a_1a_4b_2b_3-a_2a_4b_3b_4 \\
&= a_1a_4(b_1b_4-b_2b_3)-a_2a_3(b_1b_4-b_2b_3) \\
&= (a_1a_4-a_2a_3)(b_1b_4-b_2b_3)=|A|\cdot|B|.
\end{aligned}$$

U opštem slučaju je dokaz znatno složeniji. ■

Definicija. Neka je A kvadratna matrica. Za kvadratnu matricu B istog reda kažemo da je *inverzna* matrici A ako je $AB=BA=E$.

Teorema 8. *Ukoliko uopšte postoji, inverzna matrica kvadratne matrice je jedinstvena.*

Dokaz. Neka je A kvadratna matrica koja ima inverznu matricu B. Neka je C još jedna inverzna matrica matrice A. Prema definiciji je $AB=BA=E$ i $AC=CA=E$. Sada je $B=BE=B(AC)=(BA)C=EC=C$. ■

Ukoliko postoji, inverznu matricu kvadratne matrice A označavamo sa A^{-1}.

Teorema 9. *Kvadratna matrica A ima inverznu matricu ako i samo ako je $|A|\neq 0$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je B inverzna matrica matrice A. Tada je $AB=E$, odakle je $|AB|=|E|=1$. S druge strane, na osnovu Teoreme 7 je $|AB|=|A|\cdot|B|$. Dakle, $|A|\cdot|B|=1$, odakle sledi da $|A|\neq 0$.

($\Leftarrow$) Neka je $A=[a_{ij}]$ matrica reda n, neka je $D=|A|\neq 0$ i neka je $D_{(pq)}$ determinanta reda $n-1$ koja se dobija tako što se iz determinante D udalje p-ta vrsta i q-ta kolona. Neka je C sledeća matrica:

$$C=\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}D_{(11)} & (-1)^{2+1}D_{(21)} & (-1)^{3+1}D_{(31)} & \dots & (-1)^{n+1}D_{(n1)} \\ (-1)^{1+2}D_{(12)} & (-1)^{2+2}D_{(22)} & (-1)^{3+2}D_{(32)} & \dots & (-1)^{n+2}D_{(n2)} \\ (-1)^{1+3}D_{(13)} & (-1)^{2+3}D_{(23)} & (-1)^{3+3}D_{(33)} & \dots & (-1)^{n+3}D_{(n3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{1+n}D_{(1n)} & (-1)^{2+n}D_{(2n)} & (-1)^{3+n}D_{(3n)} & \dots & (-1)^{n+n}D_{(nn)} \end{bmatrix}.$$

Posmatrajmo, sada, matricu AC. Na dijagonali matrice AC se nalaze elementi oblika $\sum_{q=1}^{n}(-1)^{p+q}a_{pq}D_{(pq)}$, dok se na ostalim mestima matrice AC nalaze elementi oblika $\sum_{q=1}^{n}(-1)^{p+q}a_{rq}D_{(pq)}$, $r\neq p$. Razvoj determinante nam dalje daje

$\sum_{q=1}^{n}(-1)^{p+q}a_{pq}D_{(pq)} = D$, dok za $r \neq p$ znamo da je $\sum_{q=1}^{n}(-1)^{p+q}a_{rq}D_{(pq)} = 0$, jer se radi o razvoju determinante koja ima dve jednake vrste. Dakle,

$$AC = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D \end{bmatrix}.$$

Na isti način zaključujemo da je

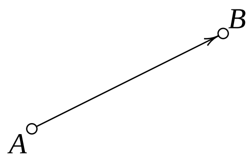
$$CA = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D \end{bmatrix}.$$

Prema tome, za matricu $B = \frac{1}{D}C$ važi da je $AB = BA = E$, što znači da je B inverzna matrica matrice A. ■

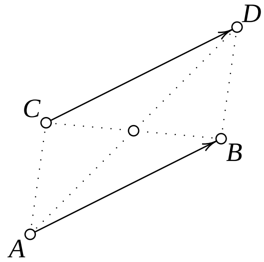
1.8 Vektorski račun

Vektor je uređeni par tačaka (A,B). Vektor (A,A) zovemo *nula-vektor*; inače, za vektor kažemo da je *ne-nula*.

O vektorima razmišljamo kao o orijentisanim dužima: kod vektora (A,B), A je početna tačka, a B krajnja. Zato ih crtamo kao strelice usmerene od početne ka krajnjoj tački:



i umesto (A,B) pišemo $\overrightarrow{AB}$. Nula-vektor zapisujemo kao $\overrightarrow{AA}$ ili samo $\overrightarrow{0}$. Vektore često označavamo i jednim malim slovom, recimo ovako: $\overrightarrow{a}$, kada su početak i kraj vektora jasni iz konteksta.



Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ su *jednaki* ako se središte duži $[AD]$ poklapa sa središtem duži $[BC]$. Ukoliko su svake tri od tačaka A, B, C, D nekolinearne prethodni uslov je ekvivalentan zahtevu da je $ABDC$ paralelogram.

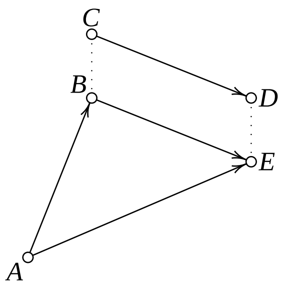
Intenzitet ne-nula vektora $\overrightarrow{AB}$ je merni broj duži $[AB]$, a intenzitet nula-vektora je 0. Dva ne-nula vektora imaju *isti intenzitet* ako su odgovarajuće duži podudarne. Intenzitet vektora označavamo sa $|\overrightarrow{AB}|$, odnosno $|\overrightarrow{a}|$.

Nosač ne-nula vektora je prava AB. Dva ne-nula vektora imaju *isti pravac* ako su im nosači paralelni (napomenimo da se za dve prave koje se poklapaju takođe smatra da su paralelne). Nema prirodnog načina da se definiše nosač nula-vektora, pa se zato o pravcu nula-vektora ne govori. Za vektore istog pravca kažemo još i da su *kolinearni*.

Za ne-nula vektore istog pravca možemo govoriti o tome da li su istog ili suprotnog smera. Ovde ćemo preskočiti strogu definiciju i oslanjajući se na intuiciju reći samo ovoliko: dva ne-nula vektora istog pravca imaju *isti smer* ako stoje ovako $\uparrow\uparrow$, a *suprotnog su smera* ako stoje ovako $\uparrow\downarrow$. Pri tome njihovi intenziteti mogu biti različiti.

Za dva vektora kažemo da su jednaki ako i samo ako imaju isti pravac, smer i intenzitet.

Napomena. Pažljivi čitalac je verovatno već primetio da smo se u dosadašnjoj priči dosta pozivali na intuiciju. Na primer, pribegli smo mahanju strelicama umesto da damo definiciju smera vektora. Takođe, rekli smo da je vektor uređeni par tačaka, a onda smo pričali o jednakosti vektora koja *nije jednakost uređenih parova*. Recimo, na slici pored vektori (C,D) i (B,E) su jednaki *kao vektori*, mada ti parovi tačaka nisu jednaki kao geometrijski objekti. Zato ćemo sada ukazati na način da se priča o vektorima ispriča potpuno korektno.



Označimo sa $\mathscr{E}$ skup tačaka prostora u kome radimo. Na skupu $\mathscr{E}^2$ uređenih parova tačaka uvedemo relaciju ω ovako: $(A,B)\ \omega\ (C,D)$ ako se središte duži $[AD]$ poklapa sa središtem duži $[BC]$. Ako su svake tri od tačaka A, B, C, D nekolinearne, onda je $(A,B)\ \omega\ (C,D)$ ekvivalentno sa činjenicom da je $ABDC$ paralelogram. Lako se pokazuje da je ω relacija ekvivalencije na skupu $\mathscr{E}^2$. Neka je $\mathscr{V} = \mathscr{E}^2/\omega$ odgovarajući količnički skup. Elemente skupa $\mathscr{V}$ zovemo *vektori*. Tako dobijamo da je vektor zapravo *skup* koga čine svi geometrijski vektori (dakle, orijentisane duži) koji imaju dati pravac, smer i intenzitet.

Iako je ovo potpuno korektno zasnivanje pojma vektora, mi ćemo i dalje raditi sa geometrijskim vektorima zato što se time dobija jednostavniji račun oslobođen nepotrebnog formalizma.

Zbir dva vektora je vektor koji se dobija nadovezivanjem početka drugog vektora na kraj prvog. Evo kako. Neka su $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ vektori. Odredimo tačku E takvu da je $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$. (Primetimo da je tačka E jedinstvena i da je ona četvrto teme paralelograma $DCBE$.) Tada je vektor $\overrightarrow{AE}$ jednak zbiru vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$, što pišemo ovako: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

Suprotni vektor vektora $\overrightarrow{AB}$ je vektor $\overrightarrow{BA}$. Jasno je da je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$, pa zato pišemo $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. Vektor $\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{CD})$ zovemo *razlika vektora* $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ i kraće ga označavamo sa $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$. Ovako uvedena operacija se zove *oduzimanje vektora*.

Lema 10. *Za svaki vektor* $\overrightarrow{AB}$ *važi sledeće:*

(1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB}$; *i*

(2) $\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0}$. ■

Lema 11. *Neka su A, B, C i D četiri tačke takve da je* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. *Tada je* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

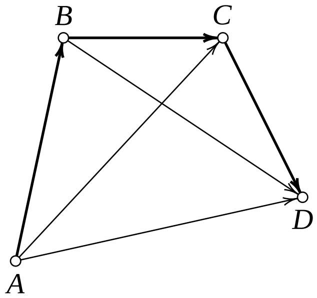
Dokaz. Očito je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$. Kako je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ mora biti $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. ■

Teorema 12. *Za svaka tri vektora* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PQ}$ *i* $\overrightarrow{UV}$ *važi sledeće:*

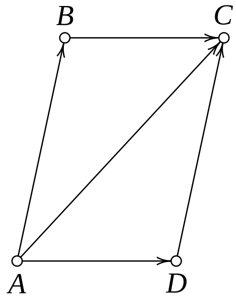
(1) $\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{UV}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{UV}$*; i*

(2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{AB}$.

Dokaz. (1) Neka su C i D tačke takve da je $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{UV}$. Tada je $\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{UV}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$. S druge strane, $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{UV} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

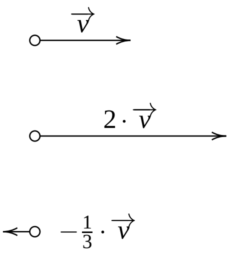


Dokaz osobine (1)



Dokaz osobine (2)

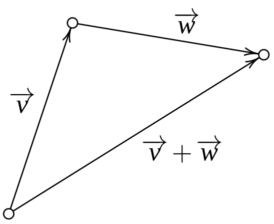
(2) Neka su C i D tačke takve da je $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PQ}$. Tada prema Lemi 11 znamo da je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Zato je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{AB}$. ■



Množenje vektora brojem je operacija kojom se menja intenzitet vektora, a u zavisnosti od znaka broja, i smer. Neka je α neki realan broj i $\overrightarrow{v}$ neki vektor. Ako je $\alpha = 0$ ili $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, onda je $\alpha \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Neka je $\alpha \neq 0$ i $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$. Ako je $\alpha > 0$, onda je $\alpha \cdot \overrightarrow{v}$ vektor koji ima isti pravac i smer kao vektor $\overrightarrow{v}$, i α puta veći intenzitet. Ako je $\alpha < 0$, onda je $\alpha \cdot \overrightarrow{v}$ vektor koji ima isti pravac kao vektor $\overrightarrow{v}$, suprotnog je smera, a intenzitet mu je $-\alpha$ puta veći, kako je to pokazano na slici pored.

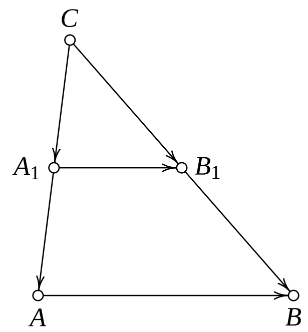
Lako se vidi da za svaka dva realna broja α, β i za svaka dva vektora $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ važi sledeće:

- $\alpha \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \alpha \cdot \overrightarrow{v} + \alpha \cdot \overrightarrow{w}$;
- $(\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{v} = \alpha \cdot \overrightarrow{v} + \beta \cdot \overrightarrow{v}$;
- $(\alpha\beta) \cdot \overrightarrow{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \overrightarrow{v})$;
- $1 \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$.



Osim toga,

- $|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}| \leqslant |\overrightarrow{v}| + |\overrightarrow{w}|$;
- $|\alpha \cdot \overrightarrow{v}| = |\alpha| \cdot |\overrightarrow{v}|$.



Primer. Neka je $[A_1B_1]$ srednja linija trougla ABC, pri čemu je A_1 središte duži $[AC]$, a B_1 središte duži $[BC]$. Dokazati da je $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{A_1B_1}$.

Rešenje. Očito je $\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{CB_1}$. Množenjem ove jednakosti sa 2 dobijamo da je $2\overrightarrow{CA_1} + 2\overrightarrow{A_1B_1} = 2\overrightarrow{CB_1}$. Kako je $2\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CA}$ i $2\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{CB}$, prethodna jednakost postaje $\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{CB}$, odnosno, $2\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$. $\square$

Količnik vektora definišemo samo za vektore sa istim pravcem. Ako su $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ vektori istog pravca i ako $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$, onda je

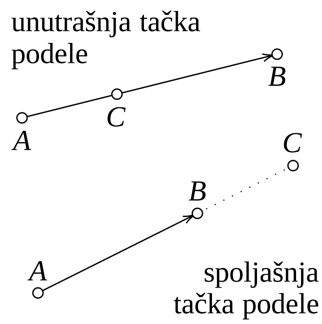
$$\frac{\overrightarrow{v}}{\overrightarrow{w}} = \pm \frac{|\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{w}|},$$

gde se znak „+” uzima ako su vektori istog smera, a znak „−” ako su suprotnog smera. Jasno je da za vektore $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ istog pravca važi sledeće tvrđenje:

$$\frac{\overrightarrow{v}}{\overrightarrow{w}} = \alpha \Longleftrightarrow \overrightarrow{v} = \alpha \cdot \overrightarrow{w}.$$

Na osnovu prethodnih razmatranja dolazimo do važnog zaključka: Kada računamo sa vektorima, možemo da se opustimo i da računamo (skoro) kao sa brojevima! Postoje male razlike na koje se čovek lako i brzo navikne.

1.9 Podela vektora u datom odnosu



Neka su A, B, C tri kolinearne tačke i $\alpha \neq -1$ realan broj. Kažemo da *tačka C deli vektor $\overrightarrow{AB}$ u odnosu α* ako je

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \alpha.$$

Ako tačka C pripada duži $[AB]$, onda je $\alpha > 0$ i kažemo da je C *unutrašnja tačka podele* vektora $\overrightarrow{AB}$. Ako, međutim, C ne pripada duži $[AB]$, onda je $\alpha < 0$, a za tačku C kažemo da je *spoljašnja tačka podele* vektora $\overrightarrow{AB}$.

Teorema 13. *Tačka C deli vektor $\overrightarrow{AB}$ u odnosu $\alpha \neq -1$ ako i samo ako za svaku tačku M važi:*

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{\alpha+1}\overrightarrow{MA} + \frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{MB}.$$

Dokaz. Dokažimo samo smer ($\Rightarrow$) zato što se druga implikacija pokazuje slično. Neka tačka C deli vektor $\overrightarrow{AB}$ u odnosu α. Tada je $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{CB}$, odakle je $\overrightarrow{AC} + \alpha\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$. Neka je M proizvoljna tačka. Tada je

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} \qquad \text{i} \qquad \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}.$$

Ako drugu jednakost pomnožimo sa α i saberemo sa prvom, dobijamo:

$$(1+\alpha)\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB} + (\overrightarrow{AC} + \alpha\overrightarrow{BC}).$$

Zato što je izraz u zagradi na desnoj strani jednakosti jednak $\overrightarrow{0}$, nakon deljenja sa $1+\alpha$ dobijamo tvrđenje. ■

Specijalno, kada je $\alpha = \frac{m}{n}$ racionalan broj, odnosno, kada vektor $\overrightarrow{AB}$ delimo u odnosu $m : n$, prethodno tvrđenje dobija sledeći oblik:

$$\overrightarrow{MC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{MA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{MB}.$$

Posledica 14. *Tačka C pripada duži $[AB]$ ako i samo ako postoje realni brojevi $\lambda, \mu \in [0,1]$ takvi da je $\lambda + \mu = 1$ i za svaku tačku M je*

$$\overrightarrow{MC} = \lambda\overrightarrow{MA} + \mu\overrightarrow{MB}.$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka tačka C leži na duži $[AB]$ i neka je M proizvoljna tačka. Tada je C unutrašnja tačka podele vektora $\overrightarrow{AB}$, pa postoji $\alpha > 0$ takvo daje

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{\alpha+1}\overrightarrow{MA} + \frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{MB}.$$

Jasno je da brojevi $\lambda = \frac{1}{\alpha+1}$ i $\mu = \frac{\alpha}{\alpha+1}$ imaju navedene osobine.

($\Leftarrow$) Ako je $\lambda = 1$ ili $\lambda = 0$, onda je $C = A$ ili $C = B$, pa je tvrđenje očigledno tačno. Pretpostavimo, sada, da je $0 < \lambda < 1$. Stavimo $\alpha = \frac{1}{\lambda} - 1$. Očito je $\alpha > 0$, $\lambda = \frac{1}{\alpha+1}$ i $\mu = 1 - \lambda = \frac{\alpha}{\alpha+1}$. Kako je

$$\overrightarrow{MC} = \lambda\overrightarrow{MA} + \mu\overrightarrow{MB},$$

kada uvrstimo dobijene izraze za λ i μ u funkciji od α dobijamo

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{\alpha+1}\overrightarrow{MA} + \frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{MB}.$$

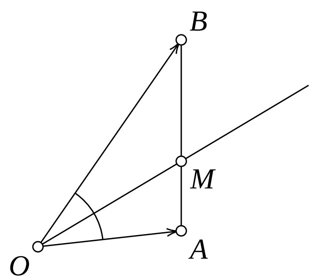
Dakle, C je unutrašnja tačka podele vektora $\overrightarrow{AB}$ u odnosu $\alpha > 0$, pa zaključujemo da je $C \in [AB]$. ■

Na kraju, pokazaćemo kako se nalazi vektor koji polovi ugao koga zaklapaju dva data vektora.

Teorema 15. *Neka je O proizvoljna tačka, neka su $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ dva ne-nula vektora i neka su p i q, redom, njihove dužine. Tada vektor*

$$\overrightarrow{OM} = \frac{q}{p+q}\overrightarrow{OA} + \frac{p}{p+q}\overrightarrow{OB}$$

polovi ugao koga zaklapaju vektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$.



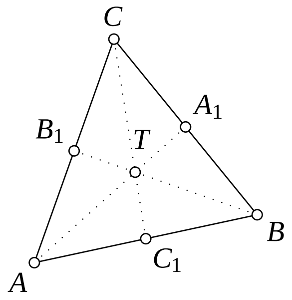
Dokaz. Želimo da nađemo tačku $M \in [AB]$ takvu da je OM simetrala ugla $\angle AOB$. U euklidskoj planimetriji važi sledeći stav:

> Neka je $M \in [AB]$. Prava OM polovi ugao $\angle AOB$ ako i samo ako je $[OA] : [OB] = [MA] : [MB]$.

Odatle dobijamo da tačka M deli vektor $\overrightarrow{AB}$ u odnosu $[OA] : [OB] = p : q$, pa primenimo stav o podeli vektora u datom odnosu. ■

1.10 Težište skupa tačaka

Težište T trougla ABC ima sledeću važnu osobinu: $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\overrightarrow{0}$. Pokažimo da je to zaista tako. Neka su A_1, B_1, C_1 središta odgovarajućih strana trougla ABC kako je pokazano na slici pored. Zato što težište deli težišnu duž u odnosu 2 : 1, dobijamo da je $\overrightarrow{TA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{TB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{B_1B}$ i $\overrightarrow{TC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{C_1C}$. Sabiranjem ove tri jednakosti dobijamo:



$$\begin{aligned}\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC} &= \tfrac{2}{3}(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{C_1C})\\ &= \tfrac{2}{3}(\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{B_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{C_1B}+\overrightarrow{BC})\\ &= \tfrac{2}{3}(\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{B_1A}+\overrightarrow{C_1B}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{0},\end{aligned}$$

zato što je $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{0}$ i $\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{B_1A}+\overrightarrow{C_1B}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{0}$.

Ovim primerom motivisana je sledeća definicija. *Težište skupa tačaka* $\{A_1, A_2,\ldots,A_n\}$ je tačka T takva da je $\overrightarrow{TA_1}+\overrightarrow{TA_2}+\ldots+\overrightarrow{TA_n}=\overrightarrow{0}$. Na primer, težište jednoelementnog skupa tačaka je sama ta tačka, težište skupa $\{A,B\}$ za $A\neq B$ je središte duži $[AB]$, a težište skupa $\{A,B,C\}$, gde su A, B i C tri različite tačke, je upravo težište trougla ABC.

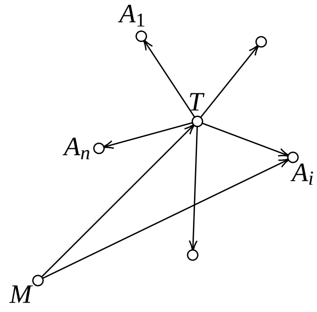
Teorema 16. *Ukoliko postoji, težište konačnog, nepraznog skupa tačaka je jedinstveno.*

Dokaz. Neka su S i T dva težišta skupa tačaka $\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$. Tada je $\overrightarrow{SA_1}+\overrightarrow{SA_2}+\ldots+\overrightarrow{SA_n}=\overrightarrow{0}$ i $\overrightarrow{TA_1}+\overrightarrow{TA_2}+\ldots+\overrightarrow{TA_n}=\overrightarrow{0}$. Oduzimanjem ove dve jednakosti dobija se $(\overrightarrow{SA_1}-\overrightarrow{TA_1})+(\overrightarrow{SA_2}-\overrightarrow{TA_2})+\ldots+(\overrightarrow{SA_n}-\overrightarrow{TA_n})=\overrightarrow{0}$. Zbog $\overrightarrow{SA_i}-\overrightarrow{TA_i}=\overrightarrow{ST}$ prethodna jednakost postaje $n\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{0}$, odakle je $\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{0}$ i tako $S=T$. ■

Sledeća teorema pokazuje da svaki konačan, neprazan skup tačaka ima težište. Štaviše, ona daje i veoma efikasan način za njegovu konstrukciju.

Teorema 17. *Neka je $S=\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$ skup tačaka i M proizvoljna tačka. T je težište skupa S ako i samo ako je*

$$\overrightarrow{MT}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\ldots+\overrightarrow{MA_n}).$$



Dokaz. $(\Rightarrow)$ Za svako $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ je $\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{TA_i}=\overrightarrow{MA_i}$. Sabiranjem ovih n jednakosti dobijamo:

$$n\overrightarrow{MT}+(\overrightarrow{TA_1}+\overrightarrow{TA_2}+\ldots+\overrightarrow{TA_n})=\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\ldots+\overrightarrow{MA_n}.$$

Zato što je T težište skupa S, izraz u zagradi sa leve strane jednakosti je $\overrightarrow{0}$, odakle, nakon deljenja sa n sledi tvrđenje.

($\Leftarrow$) Kao u prethodnom pasusu dobijamo da je

$$n\overrightarrow{MT} + (\overrightarrow{TA_1} + \overrightarrow{TA_2} + \ldots + \overrightarrow{TA_n}) = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \overrightarrow{MA_n}.$$

Prema uslovu teoreme je

$$n\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \overrightarrow{MA_n},$$

na osnovu čega zaključujemo da je $\overrightarrow{TA_1} + \overrightarrow{TA_2} + \ldots + \overrightarrow{TA_n} = \overrightarrow{0}$. Dakle, T je težište skupa S. ■

Dakle, da bi se odredilo težište konačnog skupa tačaka treba uzeti proizvoljnu tačku M u ravni i odrediti vektor $\frac{1}{n}(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \overrightarrow{MA_n})$. Njegova krajnja tačka je težište.

1.11 Vektorski prostori

Vektorski prostor je apstraktna algebarska struktura kojom se uopštava pojam geometrijskog vektora. *Vektorski prostor* je neprazan skup V sa sledećim osobinama:

(a) na skupu V definisana je operacija $+$ koja je asocijativna i komutativna, ima neutralni element i svaki element skupa V ima inverzni u odnosu na ovu operaciju (drugim rečima, $(V,+)$ je Abelova grupa);

(b) na skupu V definisana je spoljašnja operacija $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ (množenje vektora brojem) tako da za svaka dva realna broja α, β i svaka dva elementa v i w skupa V važi:

- $\alpha \cdot (v+w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w,$
- $(\alpha+\beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v,$
- $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v),$
- $1 \cdot v = v,$

Napomena. Preciznije, ovako uvedena struktura se zove *realni* vektorski prostor, zato što se definiše u odnosu na polje realnih brojeva. Postoje i drugačiji vektorski prostori, no oni nisu premet ovog kursa.

Primer. Neka je na skupu $\mathbb{R}^n$ svih nizova realnih brojeva dužine n definisano sabiranje ovako: $(a_1,a_2,\ldots,a_n)+(b_1,b_2,\ldots,b_n) = (a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)$, a množenje niza brojem ovako: $\alpha \cdot (a_1,a_2,\ldots,a_n) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \ldots, \alpha \cdot a_n)$. Tada je $\mathbb{R}^n$ vektorski prostor, a nizovi realnih brojeva dužine n vektori. □

Primer. Neka je na skupu $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ svih realnih funkcija $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisano sabiranje ovako: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, a množenje broja i funkcije ovako: $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Tada je $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vektorski prostor. $\square$

Za konačan niz vektora $b_1, \dots, b_k \in V$ kažemo da *generiše* V ako za svaki vektor $v \in V$ postoje $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ sa osobinom $v = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_k b_k$. Vektorski prostor V je *konačno dimenzionalan* ako postoji konačan niz vektora koji ga generiše.

Primer. Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ je konačno dimenzionalan za svako n zato što ga generiše sledeći konačan niz vektora:

$$e_1 = (1,0,0,\dots,0,0), \quad e_2 = (0,1,0,\dots,0,0), \quad \dots, \quad e_n = (0,0,0,\dots,0,1).$$

S druge strane, vektorski prostor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ nije konačno dimenzionalan. $\square$

Niz vektora $b_1, \dots, b_k \in V$ vektorskog prostora V je *linearno nezavisan* ako za svaki odabir brojeva $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ iz $\alpha_1 b_1 + \ldots \alpha_k b_k = 0$ sledi da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. *Baza vektorskog prostora* V je konačan niz vektora $b_1, \dots, b_k \in V$ koji je linearno nezavisan i koji ga generiše.

Primer. Sledeći niz vektora je baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$:

$$e_1 = (1,0,0,\dots,0,0), \quad e_2 = (0,1,0,\dots,0,0), \quad \dots, \quad e_n = (0,0,0,\dots,0,1).$$

Ovo je druga baza istog vektorskog prostora:

$$e'_1 = (1,0,0,\dots,0,0), \quad e'_2 = (1,1,0,\dots,0,0), \quad \dots, \quad e'_n = (1,1,1,\dots,1,1).$$

Bazu $e_1, \dots, e_n$ zovemo *standardna baza* vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$. $\square$

Teorema 18. *Svake dve baze konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V imaju isti broj elemenata. Taj broj se zove dimenzija vektorskog prostora V.* $\blacksquare$

Primer. Dimenzija vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ je 3, a dimenzija vektorskog prostora $\mathbb{R}^6$ je 6. $\square$

Neka su V_1 i V_2 vektorski prostori i $f : V_1 \to V_2$ neko preslikavanje. Preslikavanje f je *linearno* ako ispunjava sledeće uslove:

- za svaka dva vektora $v, w \in V_1$ je $f(v+w) = f(v) + f(w)$, i
- za svaki realan broj α i svaki vektor $v \in V_1$ je $f(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot f(v)$.

Linearna preslikavanja su preslikavanja vektorskih prostora koja „čuvaju strukturu”. Bijektivno linearno preslikavanje zove se *izomorfizam*, a za prostore V_1 i V_2 tada kažemo da su *izomorfni*. Pišemo $V_1 \cong V_2$.

Teorema 19. *Svaki vektorski prostor V konačne dimenzije d izomorfan je vektorskom prostoru $\mathbb{R}^d$.* ■

Linearna preslikavanja su „pravilna” što omogućuje njihovo lako računanje. Sledeća teorema pokazuje da je slika nekog vektora datim linearnim preslikavanjem jednoznačno određena slikom vektora baze.

Teorema 20. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanje, a $e_1, \ldots, e_n$ standardna baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$. Tada za svaki vektor $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ iz $\mathbb{R}^n$ imamo: $f(v) = \alpha_1 f(e_1) + \ldots + \alpha_n f(e_n)$.* ■

Ova lepa osobina linearnih preslikavanja nam omogućuje da ih zapišemo na veoma kompaktan način koji je izuzetno pogodan za računarsku implementaciju.

Matrična reprezentacija vektora $v = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ je vektor-kolona

$$[v] = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

Matrična reprezentacija linearnog preslikavanja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je matrica

$$[f] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

gde je

$$[f(e_1)] = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad [f(e_2)] = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad [f(e_n)] = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

a $e_1, \ldots, e_n$ standardna baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$. Primetimo da matrična reprezentacija vektora i linearnog preslikavanja zavisi od uočene baze vektorskog prostora, ali mi ćemo uvek raditi samo sa standardnom bazom. Na osnovu Teoreme 20 sada je lako izračunati sliku nekog vektora u odnosu na dato linearno preslikavanje kada imamo njihove matrične reprezentacije.

Teorema 21. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanje i $v \in \mathbb{R}^n$ neki vektor. Tada je $[f(v)] = [f][v]$, gde se na desnoj strani jednakosti radi o množenju matrica.* ■

Linearno preslikavanje, dakle, ima veoma jednostavan zapis u matričnom obliku:

$$y = Ax,$$

gde je $x = [v]$ matrična reprezentacija vektora v, $y = [f(v)]$ matrična reprezentacija vektora $f(v)$, a $A = [f]$ matrična reprezentacija preslikavanja f.

Primer. Neka je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ preslikavanje dato sa $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, x_2 + x_3)$. Matrična reprezentacija preslikavanja f se dobija tako što se nađe matrična reprezentacija vektora $f(e_1)$, $f(e_2)$ i $f(e_3)$:

$$[f(e_1)] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [f(e_2)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [f(e_3)] = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tako da je

$$[f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pogledajmo na jednom primeru kako se primena linearnog preslikavanja svodi na množenje matrica. Direktnim uvrštavanjem se lako dobija da je $f(1, -1, 3) = (-5, 2)$. S druge strane:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Za preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kažemo da je *afino* ako je preslikavanje $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dato sa $g(x) = f(x) - f(0)$ linearno. Afino preslikavanje takođe ima veoma jednostavan zapis u matričnom obliku:

$$y = Ax + b,$$

gde je $A = [g]$ matrična reprezentacija preslikavanja g, a $b = [f(0)]$ matrična reprezentacija vektora $f(0)$. Jasno je da je svako linearno preslikavanje ujedno i afino preslikavanje. Obrnuto, naravno, nije tačno: afino preslikavanje $y = Ax + b$ je linearno ako i samo ako je $b = 0$.

Preslikavanje $y = f(x)$ je *invertibilno* ako postoji preslikavanje $x = g(y)$ takvo da je $x = g(f(x))$ i $y = f(g(y))$.

Teorema 22. *Linearno preslikavanje $y = Ax$ je invertibilno ako i samo ako je A kvadratna matrica takva da je $|A| \neq 0$. U tom slučaju inverzno preslikavanje ima oblik $x = A^{-1}y$.*

Slično, afino preslikavanje $y = Ax + b$ je invertibilno ako i samo ako je A kvadratna matrica takva da je $|A| \neq 0$. U tom slučaju inverzno preslikavanje ima oblik $x = A^{-1}y - A^{-1}b$. $\blacksquare$

1.12 Implementacija: Affine2D i Affine3D

Klasa Affine2D implementira rad sa afinim transformacijama u dve dimenzije. To su, dakle, transformacije f koje preslikavaju $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$ na sledeći način:

$$f(x) = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

Zato za predstavljanje ovih transformacija koristimo šest realnih brojeva.

```
public class Affine2D {
   public double a00, a01, a10, a11, b0, b1;

   public Affine2D(double a00, double a01, double a10, double a11,
                   double b0, double b1)
   {
      this.a00 = a00; this.a01 = a01; this.a10 = a10; this.a11 = a11;
      this.b0 = b0;   this.b1 = b1;
   }
```

Metod compose određuje kompoziciju dve afine transformacije. Pri tome f.compose(g) znači f ∘ g, odnosno, da se transformacija f primenjuje posle transformacije g. Ako su f i g dati u matričnom obliku ovako:

$$f(x) = Ax + b \quad \text{i} \quad g(x) = Cx + d,$$

onda je

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(Cx + d) = A(Cx + d) + b = ACx + (Ad + b).$$

```
   public Affine2D compose(Affine2D g) {
      return new Affine2D(
         a00*g.a00 + a01*g.a10, a00*g.a01 + a01*g.a11,
         a10*g.a00 + a11*g.a10, a10*g.a01 + a11*g.a11,
         a00*g.b0 + a01*g.b1 + b0,
         a10*g.b0 + a11*g.b1 + b1
      );
   }
```

Na kraju se nalaze metodi koji određuju determinantu afine transformacije i inverznu transformaciju datoj afinoj transformaciji. Za transformaciju

$$f(x) = Ax + b$$

inverzna transformacija postoji ako i samo matrica A ima inverznu matricu i tada je

$$f^{-1}(x) = A^{-1}x - A^{-1}b.$$

Podsetimo se da kvadratna matrica A ima inverznu matricu ako i samo ako je $|A| \neq 0$.

```
   public Affine2D inv() {
      double d = MyMath.det2(a00, a01, a10, a11);
      if(d == 0.0) {
         System.out.println("Affine2D: inv: noninvertible transformation");
         System.exit(0);
      }
      double p00, p01, p10, p11;
      p00 =  a11/d; p01 = -a01/d;
      p10 = -a10/d; p11 =  a00/d;
```

```
    return new Affine2D(
      p00, p01, p10, p11, -(p00*b0 + p01*b1), -(p10*b0 + p11*b1)
    );
  }
}
```

Klasa MyMath sadrži niz jednostavnih pomoćnih metoda. Na primer, MyMath.det2 računa vrednost determinante reda 2, dok MyMath.det3 računa vrednost determinante reda 3.

Klasa Affine3D predstavlja podršku za rad sa afinim transformacijama u tri dimenzije. To su transformacije f koje preslikavaju $\mathbb{R}^3$ u $\mathbb{R}^3$ na sledeći način:

$$f(x) = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Zato za predstavljanje ovih transformacija koristimo dvanaest realnih brojeva. Ova klasa ima strukturu koja je identična strukturi klase Affine2D.

```
public class Affine3D {
  public double a00, a01, a02, a10, a11, a12,  a20, a21, a22, b0, b1, b2;

  public Affine3D(
    double a00, double a01, double a02, double a10, double a11, double a12,
    double a20, double a21, double a22, double b0, double b1, double b2)
  {
    this.a00 = a00; this.a01 = a01; this.a02 = a02;
    this.a10 = a10; this.a11 = a11; this.a12 = a12;
    this.a20 = a20; this.a21 = a21; this.a22 = a22;
    this.b0 = b0; this.b1 = b1; this.b2 = b2;
  }

  //  Kompozicija dve afine transformacije
  //  f.compose(g) znaci f o g, tj. da se f primenjuje posle g

  public Affine3D compose(Affine3D g) {
    return new Affine3D(
      a00*g.a00 + a01*g.a10 + a02*g.a20, a00*g.a01 + a01*g.a11 + a02*g.a21,
      a00*g.a02 + a01*g.a12 + a02*g.a22, a10*g.a00 + a11*g.a10 + a12*g.a20,
      a10*g.a01 + a11*g.a11 + a12*g.a21, a10*g.a02 + a11*g.a12 + a12*g.a22,
      a20*g.a00 + a21*g.a10 + a22*g.a20, a20*g.a01 + a21*g.a11 + a22*g.a21,
      a20*g.a02 + a21*g.a12 + a22*g.a22, a00*g.b0 + a01*g.b1 + a02*g.b2+ b0,
      a10*g.b0 + a11*g.b1 + a12*g.b2+ b1, a20*g.b0 + a21*g.b1 + a22*g.b2+ b2
    );
  }

 public Affine3D inv() {
  double d = MyMath.det3(a00, a01, a02, a10, a11, a12, a20, a21, a22);
  if(d == 0.0) {
   System.out.println("Affine3D: inv: noninvertible transformation");
```

```
      System.exit(0);
    }
    double p00, p01, p02, p10, p11, p12, p20, p21, p22;
    p00 =  MyMath.det2(a11, a12, a21, a22) / d;
    p10 = -MyMath.det2(a10, a12, a20, a22) / d;
    p20 =  MyMath.det2(a10, a11, a20, a21) / d;
    p01 = -MyMath.det2(a01, a02, a21, a22) / d;
    p11 =  MyMath.det2(a00, a02, a20, a22) / d;
    p21 = -MyMath.det2(a00, a01, a20, a21) / d;
    p02 =  MyMath.det2(a01, a02, a11, a12) / d;
    p12 = -MyMath.det2(a00, a02, a10, a12) / d;
    p22 =  MyMath.det2(a00, a01, a10, a11) / d;
    return new Affine3D(
      p00, p01, p02, p10, p11, p12, p20, p21, p22,
      -(p00*b0 + p01*b1 + p02*b2),
      -(p10*b0 + p11*b1 + p12*b2),
      -(p20*b0 + p21*b1 + p22*b2)
    );
  }
}
```

1.13 Zadaci

1. Rešiti sledeće sisteme jednačina:
   (a) $\begin{array}{l} 2x-3y=-6 \\ 4x^2-y^2-4x=-1 \end{array}$ (b) $\begin{array}{l} 5x+7y=61 \\ xy=8 \end{array}$ (c) $\begin{array}{l} 2x+3y=18 \\ xy=8. \end{array}$

2. Rešiti sledeće sisteme jednačina:
   (a) $\begin{array}{l} x^2+xy+y^2=4 \\ x+xy+y=2 \end{array}$ (b) $\begin{array}{l} x^3-y^3=19(x-y) \\ x^3+y^3=7(x+y) \end{array}$ (c) $\begin{array}{l} 2x^2=y(1+x^2) \\ 2y^2=x(1+y^2). \end{array}$

3. Izračunati determinante:
   (a) $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & 3+\sqrt{3} \\ 3-\sqrt{3} & 2+\sqrt{2} \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} a-1 & -1 \\ 1 & a^2+a+1 \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

4. Diskutovati rešenje sistema u zavisnosti od vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$:
   (a) $\begin{array}{rl} (2-a)x+ & 6y=1 \\ 6x+ & (2-a)y=1 \end{array}$ (b) $\begin{array}{l} ax+4y=2 \\ 9x+ay=3. \end{array}$

5. Rešiti sledeće sisteme jednačina:
   (a) $\begin{array}{l} 2x-y+z=0 \\ x\quad -z=-9 \\ x+y+z=8 \end{array}$ (b) $\begin{array}{l} 2x-2y+z=0 \\ x+y+3z=8 \\ x-3y-2z=-8 \end{array}$ (c) $\begin{array}{l} 2x-2y+z=0 \\ x+y+3z=8 \\ x-3y-2z=3. \end{array}$

6. Naći jednačinu parabole $y=ax^2+bx+c$ koja prolazi kroz tačke $(-1,10)$, $(1,6)$ i $(2,13)$.

7. Odrediti realne brojeve A, B i C tako da funkcija $y(x)=A\sin x+B\sin 2x+C\sin 3x$ zadovoljava sledeće: $y(\pi/4)=0$, $y(\pi/2)=1$ i $y(3\pi/4)=-1$.

8. Na tržištu se pojavio novi telekomunikacioni operater *Cablephonics* koji tvrdi da nudi povoljnije uslove telefonskih razgovora sa nekim zemljama u inostranstvu. Miško je naišao na njihov flajer u kome je pročitao sledeće:

Najpovoljniji uslovi telefoniranja sa vašim prijateljima i rođacima u sledećim državama Evrope:	
Država	*Tarifa (din/min)*
Austrija	5
Bosna i Hercegovina	4
Bugarska	5
Crna Gora	3
Grčka	6
Hrvatska	5
Italija	7
Luksemburg	8
Mađarska	3
Makedonija	4
Nemačka	7
Poljska	7
Rumunija	5
Slovenija	6

Pošto mu se ponuda učinila prihvatljivom, sklopio je ugovor sa njima. Posle tri meseca je primetio da nešto nije u redu sa njegovim telefonskim računima, koji su izgledali ovako:

Mesec	Razgovori sa Mađarskom (min)	Razgovori sa Austrijom (min)	Razgovori sa Nemačkom (min)	Račun (din)
Septembar	90	120	180	2520
Oktobar	70	100	120	1840
Novembar	50	110	150	2060

Koliko je *Cablephonics* zapravo naplaćivao Mišku minut razgovora sa Mađarskom, Austrijom odnosno, Nemačkom?

9. Kompanija *Johann J. Drache AG* želi da uloži 120.000 EUR tako što će deo novca deponovati u banku, za drugi deo novca će kupiti državne obveznice, dok će preostali novac uložiti u akcije kompanije *Schizer Pharmaceuticals*. Kamata na godišnjem nivou za novac deponovan u banku iznosi 2%, dobit od državnih obveznica na godišnjem nivou je 5%, dok se za akcije kompanije *Schizer Pharmaceuticals* svake godine daje dividenda u visini od 9%. Kompanija *Johann J. Drache AG* želi da iz ova tri izvora prihoda na godišnjem nivou ukupno dobije 5.500 EUR, ali da pri tome u banku uloži dva puta više novca nego u akcije, kako bi se obezbedila od neočekivanih fluktuacija na berzi. Kako kompanija *Johann J. Drache AG* treba da raspodeli novac da bi to postigla?

10. Zli čarobnjak Saruman je odlučio da prestane da vija Hobite i da se posveti nauci. Kao svoju prvu vežbu iz naučno-istraživačkog rada rešio je da izračuna gravitaciono ubrzanje Mordora. Eksperiment su pripremili ovako: Saruman se popeo na vrh svoje 70 metara visoke kule, dok je njegov pomoćnik kroz jedan prozor negde blizu sredine kule ispalio iz samostrela strelu u vis. Saruman je primetio da je streli bila potrebna tačno jedna sekunda da stigne do najviše tačke na kuli na kojoj se on nalazio. Strela je potom nastavila put u vis, i u jednom trenutku počela da pada naniže, putem kojim je i ispaljena. Posle tačno 7 sekundi od ispaljivanja strele Sarumanov pomoćnik je zabeležio da je strela prošla pored prozora kroz koji je ispaljena, dok

je tačno jednu sekundu kasnije strela pala na zemlju. Pogledavši u svoju čarobnu kuglu Saruman je saznao da se pređeni put strele ispaljene naviše kod uspravnog hica računa po formuli

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0,$$

gde je g gravitaciono ubrzanje Mordora, v_0 je početna brzina strele, a h_0 je visina prozora kroz koji je strela ispaljena. Iako vešt čarobnjak, Saruman nije uspeo da se izbori sa ovim čisto matematičkim problemom. Pomozite zlom čarobnjaku Sarumanu da odredi g – gravitaciono ubrzanje Mordora, kako bi se dodvorio svom gospodaru Sauronu.

11. Rešiti sledeće sisteme jednačina:

(a)
$$\begin{aligned} \frac{6}{x} - \frac{2}{y} + \frac{1}{z} &= 4 \\ \frac{2}{x} + \frac{5}{y} - \frac{2}{z} &= \frac{3}{4} \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} + \frac{3}{z} &= \frac{63}{4} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} ay + bx &= c \\ cx + az &= b, \quad \text{za} \quad abc \neq 0. \\ bz + cy &= a \end{aligned}$$

12. Naći sva strogo pozitivna rešenja sistema jednačina:

$$\frac{y^2 z^3}{x} = 1, \quad \frac{yz}{x^2} = 2, \quad \frac{y}{x^3} = 8.$$

(Uputstvo: transformisati sistem upotrebom jedne standardne matematičke funkcije koja ima osobinu da proizvod realnih brojeva prevodi u zbir.)

13. Izračunati vrednost sledećih determinanti direktno, ili putem razvijanja po elementima neke pogodno odabrane vrste ili kolone:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}.$$

14. Izračunati vrednost sledećih determinanti:

$$\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ c & b & x+a \end{vmatrix}.$$

15. Izračunati vrednost sledećih determinanti:

$$\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+b & b & 0 \\ b & b+c & c \\ 0 & c & c+d \end{vmatrix}.$$

16. Izračunati vrednost sledećih determinanti:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+b & a+4b & a+7b \\ a+2b & a+5b & a+8b \\ a+3b & a+6b & a+9b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & p & x+p \\ p & q & px+q \\ x+p & px+q & 0 \end{vmatrix}.$$

17. Rešiti po x jednačinu $\begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 5 & -6 & x+4 \end{vmatrix} = 0.$

18. Dokazati:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a+\alpha & b+\beta \\ 1 & c+\alpha & d+\beta \end{vmatrix}.$$

19. Dokazati:

$$\begin{vmatrix} p_1+q_1 & p_2+q_2 & p_3+q_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

20. Dokazati:

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

21. Diskutovati rešenje sistema u zavisnosti od vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$:

$$(a)\ \begin{array}{r} x+\ y-\ z=1 \\ 2x+3y+az=3 \\ x+ay+3z=2 \end{array} \qquad (b)\ \begin{array}{r} x+2ay+\ z=4 \\ ax+\ y+\ z=4 \\ 2x+3ay+2z=7 \end{array} \qquad (c)\ \begin{array}{r} ax+\ y+\ z=1 \\ x+ay+\ z=a \\ x+\ y+az=a^2. \end{array}$$

22. Izračunati vrednost determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & 1 & a & a^2 \\ a^2 & a & 1 & a \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{vmatrix}.$$

23. Izračunati vrednost determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

24. Izračunati vrednost determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & y \\ 1 & x & 0 & z \\ 1 & y & z & 0 \end{vmatrix}.$$

25. Izračunati vrednost determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}.$$

26. Izračunati vrednost determinante $D = |a_{ij}|_{n\times n}$ koja izgleda ovako: ispod a_{11} sve su nule, desno od a_{22} sve su nule, ispod a_{33} sve su nule, desno od a_{44} sve su nule, itd.

27. Izračunati vrednost determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

28. Izračunati vrednost determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

29. Izračunati vrednost determinante $D = |a_{ij}|_{n\times n}$ gde je $a_{ij} = \min\{i, j\}$.

30. Izračunati vrednost determinante $D = |a_{ij}|_{n\times n}$ gde je $a_{ij} = \max\{i, j\}$.

31. Izračunati vrednost determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ b & a & b & \dots & b & b \\ b & b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a & b \\ b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

32. Izračunati vrednost determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

33. Neka je $n \geqslant 2$ paran broj. Izračunati vrednost sledeće determinante reda n:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \dots & 0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

34. Izračunati vrednost determinante $D = |a_{ij}|_{n\times n}$ gde je $a_{ij} = |i-j|$.

35. Neka su x, a_0, a_1, $\dots$, a_n proizvoljni realni brojevi. Izračunati vrednost sledeće determinante reda $n+1$:

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}.$$

36. Neka su x, a_1, a_2, $\dots$, a_n proizvoljni realni brojevi. Izračunati vrednost sledeće determinante reda n:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix}.$$

37. Neka su $a_1, a_2, \dots, a_n$ realni brojevi takvi da je $a_1a_2\dots a_n \neq 0$. Izračunati vrednost sledeće determinante reda $n+1$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

38. Dokazati:

$$\begin{vmatrix} a+c & b+d & a+c & b+d \\ b+d & a+c & b+d & a+c \\ a+b & b+c & c+d & d+a \\ c+d & d+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 0.$$

39. Ako je $abcde \neq 0$, izračunati

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+e \end{vmatrix}.$$

40. Neka je $D = |a_{ij}|_{n\times n}$ determinanta neparnog reda takva da je $a_{ij} = -a_{ji}$, za sve i i j. Dokazati da je tada $D = 0$.

41. *Dijagonalna matrica* je matrica oblika

$$\operatorname{diag}(a_1,\dots,a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix},$$

gde su $a_1, a_2, \dots, a_n$ realni brojevi. Izračunati

$$\operatorname{diag}(a_1,\dots,a_n)\cdot \operatorname{diag}(b_1,\dots,b_n).$$

42. Izračunati A^n za svako $n \in \mathbb{N}$, gde je A sledeća matrica:

$$(a)\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (b)\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

43. Izračunati $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

44. Rešiti sledeće matrične jednačine u skupu realnih matrica formata 2×2:

$$(a)\quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (b)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot X = X\cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

45. Rešiti matričnu jednačinu $X^2 = X$ u skupu realnih matrica oblika $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$.

46. rešiti matričnu jednačinu $X^2 - X - E = O$ u skupu realnih matrica oblika $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$.

47. Dokazati da je $|cA| = c^n|A|$ za svaki realan broj c i svaku kvadratnu matricu A reda n.

48. Dokazati da je $|A^n| = |A|^n$ za svaku kvadratnu matricu A reda n.

49. Izračunati $|A|$ ako se zna da je $A^3 = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 10 & 3 & 10 \end{bmatrix}$.

50. Izračunati A^{-1}, gde je A sledeća matrica:

$$(a)\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (b)\quad \begin{bmatrix} 6 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

51. Izračunati A^{-1}, gde je $A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, ako se zna da je $a_1 a_2 \ldots a_n \neq 0$. (Za definiciju dijagonalne matrice videti Zadatak 41.)

52. Neka je A kvadratna matrica koja ima inverznu matricu. Dokazati da je:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

53. Izračunati $|A|$ ako se zna da je $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

54. Neka su A i B kvadratne matrice istog reda takve da matrica $C = AB$ ima inverznu matricu.
   (a) Dokazati da tada i matrice A i B imaju inverzne matrice.
   (b) Odrediti C^{-1} u funkciji od A^{-1} i B^{-1}.

55. Rešiti matričnu jednačinu: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

56. Rešiti matričnu jednačinu $AXB = C$ gde je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

57. Rešiti matričnu jednačinu $AXB + XB = C$ gde je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

58. Neka je $ABCD$ četvorougao i O neka tačka. Izraziti vektore određene stranama i dijagonalama ovog četvorougla pomoću vektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ i $\overrightarrow{OD}$.

59. Neka je $ABCD$ paralelogram, O presek njegovih dijagonala i M proizvoljna tačka. Dokazati da je $4\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

60. Nad stranama trougla ABC konstruisani su paralelogrami ABB_1A_2, BCC_1B_2 i CAA_1C_2. Dokazati da je $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{0}$.

61. Neka je ABC trougao, A_1 središte strane $[BC]$, B_1 središte strane $[AC]$ i C_1 središte strane $[AB]$. Dokazati:
   (a) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}$.
   (b) Za svaku tačku M je $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1}$.

62. Ako su M i N središta duži $[AC]$ i $[BD]$, dokazati da je $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{MN}$.

63. Ako su M, N, P, Q, R, S, tim redom, središta strana proizvoljnog šestougla, dokazati da je $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{0}$.

64. Neka su A, B, C, D proizvoljne tačke. Ako je E središte duži $[AB]$, S središte duži $[CD]$, a F i G takve da je $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AD}$, dokazati da su tačke G, S i F kolinearne.

65. Normalne prave p i q koje se seku u tački M seku dati krug sa centrom O u tačkama A, B, C, D. Dokazati da je $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OM}$.

66. Neka su A, B i C tri različite tačke na kružnici sa centrom O. Dokazati da je $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$ ako i samo ako je $\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC=120^\circ$.

67. Neka su A, B, C, D četiri tačke na kružnici sa centrom O. Dokazati: A, B, C, D su temena pravougaonika ako i samo ako je $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$.

68. Neka je ABC trougao, a Q, K, L, M, N, P, tačke polupravih $[AB)$, $[AC)$, $[BC)$, $[BA)$, $[CA)$, $[CB)$, tim redom, takve da je $[AQ]\cong[CP]\cong[AC]$, $[AK]\cong[BL]\cong[AB]$ i $[BM]\cong[CN]\cong[BC]$. Dokazati da su prave KL, MN i PQ paralelne.

69. Dokazati da težište trougla deli svaku od težišnih linija u odnosu $2:1$.

70. U trouglu ABC sa C_1 je označeno središte duži $[AB]$. Tačka A_1 je tačka duži $[BC]$ takva da je $[BA_1]:[A_1C]=2:1$, a tačka B_1 je tačka duži $[AC]$ takva da je $[AB_1]:[B_1C]=2:1$. Dokazati da se duži $[AA_1]$, $[BB_1]$ i $[CC_1]$ seku u jednoj tački.

71. Na strani $[AD]$ i dijagonali $[AC]$ paralelograma $ABCD$ uočene su, redom, tačke K i L takve da je $[AK]:[KD]=1:3$ i $[AL]:[LC]=1:4$. Dokazati da su tačke K, L i B kolinearne.

72. Neka su E, F, G središta, redom, strana $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ paralelograma $ABCD$. Neka prave BG i DE seku duž $[AF]$ u tačkama N i M. Dokazati da tačke M i N dele duž $[AF]$ u odnosu $2:2:1$.

73. *(Težak!)* Neka su K, L, M, N tačke na stranama $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, tim redom, četvorougla $ABCD$ takve da je $\overrightarrow{AK}:\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{BL}:\overrightarrow{LC}=\overrightarrow{CM}:\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{DN}:\overrightarrow{NA}\neq\pm1$. Ako je $KLMN$ paralelogram, onda je i $ABCD$ paralelogram. Dokazati.

74. Neka su P i Q tačke, redom, na stranama $[BC]$ i $[CD]$ paralelograma $ABCD$ takve da je $[BP]:[PC]=2:3$ i $[CQ]:[QD]=2:5$. Neka je M presečna tačka duži $[AP]$ i $[BQ]$. Odrediti u kom odnosu tačka M deli ove dve duži.

75. *Srednja linija četvorougla* je duž koja spaja središta dve njegove naspramne strane. Dokazati da srednja linija četvorougla sadrži težište tog četvorougla.

76. Neka je $ABCD$ četvorougao. Označimo sa T_A težište trougla BCD, sa T_B težište trougla ACD, sa T_C težište trougla ABD i sa T_D težište trougla ABC. Dokazati da se prave AT_A, BT_B, CT_C i DT_D seku u jednoj tački. (Uputstvo: pokazati da svaka od njih sadrži težište četvorougla.)

77. Dokazati da težište četvorougla deli svaku od duži $[AT_A]$, $[BT_B]$, $[CT_C]$ i $[DT_D]$ o kojima se govori u prethodnom zadatku u odnosu $3:1$.

78. Četvorouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$ imaju zajedničko težište (tj. $T=T'$) ako i samo ako je $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{0}$. Dokazati.

79. Ako je T težište skupa $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, a T' težište skupa $\{A'_1, A'_2, \ldots, A'_n\}$, izračunati $\overrightarrow{A_1A'_1} + \overrightarrow{A_2A'_2} + \ldots + \overrightarrow{A_nA'_n}$.

80. Neka su A, B, C, D četiri različite tačke i neka su P, Q, R, S težišta, redom, trouglova ABD, BCA, CDB i DAC. Dokazati da se težište skupa $\{A, B, C, D\}$ poklapa sa težištem skupa $\{P, Q, R, S\}$.

81. (a) Neka je $\mathbb{R}[x]$ skup svih polinoma sa realnim koeficijentima. Dokazati da je $\mathbb{R}[x]$ vektorski prostor u odnosu na sabiranje polinoma i množenje polinoma brojem.

   (b) Neka je $\mathbb{R}[x]^n$ skup svih polinoma sa realnim koeficijentima čiji stepen je najviše n. Dokazati da je $\mathbb{R}[x]^n$ vektorski prostor u odnosu na sabiranje polinoma i množenje polinoma brojem.

   (c) Neka je $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ skup svih nizova realnih brojeva. Dokazati da je $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vektorski prostor u odnosu na sabiranje nizova:

$$(x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$$

   i množenje brojem koje je definisano ovako:

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots).$$

82. (a) Dokazati da je $\mathbb{R}[x]^n$ konačno dimenzionalan vektorski prostor, odrediti njegovu standardnu bazu i dokazati da je $\mathbb{R}[x]^n \cong \mathbb{R}^{n+1}$.

   (b) *(Težak!)* Dokazati da $\mathbb{R}[x]$ i $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ nisu konačno dimenzionalni. Da li je $\mathbb{R}[x] \cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

83. Koje od sledećih preslikavanja $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ je linearno:
   (a) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 5x_2 + x_4, 0)$;
   (b) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 5x_2 + x_4, 5)$;
   (c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 - 2x_2, 6x_3 + 7x_4)$;
   (d) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2, x_2)$?

84. Dokazati da je $\Delta : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ linearno preslikavanje, gde je

$$\Delta(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots).$$

85. Neka je $d : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ preslikavanje koje polinomu dodeljuje njegov prvi izvod. Dokazati da je d linearno preslikavanje.

86. Odrediti matričnu reprezentaciju sledećih linearnih preslikavanja $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$:
   (a) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 5x_2 + x_4, 0)$;
   (b) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 5x_2 + x_4, 5x_3)$;
   (c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 - 2x_2, 6x_3 + 7x_4)$;
   (d) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1)$.

87. Odrediti matričnu reprezentaciju linearnog preslikavanja $d_{43} : \mathbb{R}[x]^4 \to \mathbb{R}[x]^3$ koje polinomu najviše četvrtog stepena dodeljuje njegov prvi izvod.

88. Odrediti matričnu reprezentaciju linearnog preslikavanja $L : \mathbb{R}[x]^4 \to \mathbb{R}[x]^5$ koje je dato sa $L(p(x)) = xp(x)$.

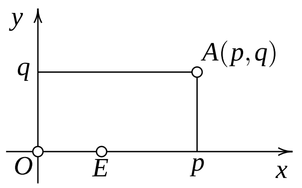
89. Dokazati da je svako od sledećih preslikavanja $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ afino i odrediti odgovarajuću matričnu reprezentaciju:
   (a) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 5x_2 + x_4 + 1, x_3 - 3, x_1 + 8)$;
   (b) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 5x_2, 5, -x_3)$;
   (c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 1, x_1 + 2, x_1 + 3)$.

90. Dokazati da je preslikavanje $T : \mathbb{R}[x]^3 \to \mathbb{R}[x]^3 : p(x) \mapsto xp(x) + x^3 - 7x + 6$ afino. Odrediti matričnu reprezentaciju ovog preslikavanja.

2 Analitička geometrija ravni

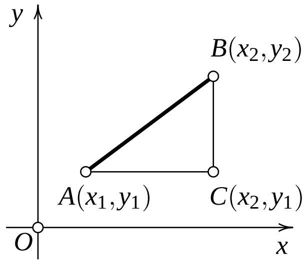
U ovoj glavi razvijamo ključne elemente analitičke geometrije u ravni. Nakon što koordinatizujemo ravan i pokažemo kako se vektorima dodeljuju koordinate uvodimo osnovne operacije sa vektorima i izvodimo nekoliko jednostavnih ali važnih formula (rastojanje tačaka u ravni i površina trougla). Potom uvodimo skalarni proizvod vektora kao moćno oruđe za merenje rastojanja i uglova u ravni. Centralni deo glave predstavlja diskusija o tri oblika jednačine prave (normalni, parametarski i eksplicitni) i o odnosima osnovnih objekata u ravni. Sledi kratka diskusija o poligonima čiji osnovi cilj je izvođenje formule za označenu površinu poligona. Potom dajemo analitički oblik najvažnijih transformacija ravni. Glavu završavamo operacionalizacijom uvedenih teorijskih koncepata u vidu klasa Point2D, Line2D i Polygon2D koje implementiraju rad sa tačkama, pravim i poligonima u ravni.

2.1 Koordinate tačke i vektora



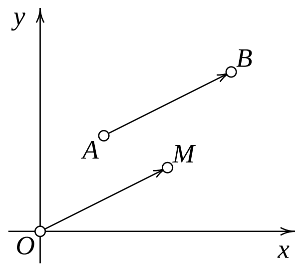
Orijentisana prava je prava na kojoj je uočen jedan od dva moguća smera. *Koordinatni sistem* je uređena četvorka (O,E,x,y), gde su x i y dve ortogonalne orijentisane prave, O njihova tačka preseka, a E tačka prave x različita od O takva da je smer vektora $\overrightarrow{OE}$ jednak smeru prave x. Duž $[OE]$ se zove *jedinična duž*.

Kada je u ravni fiksiran koordinatni sistem, svakoj tački te ravni se jednoznačno može dodeliti uređeni par realnih brojeva koje zovemo *koordinate tačke*. Zato ne pravimo razliku između tačke i njenih koordinata i često izraz „tačka čije su koordinate (p,q)" zamenjujemo (manje korektnim, ali pogodnijim) izrazom „tačka (p,q)".



Rastojanje tačaka A i B je merni broj duži $[AB]$, koga označavamo sa $d(A,B)$. Direktnom primenom Pitagorine teoreme dolazimo do formule koja izražava rastojanje dve tačke preko njihovih koordinata. Neka su $A(x_1,y_1)$ i $B(x_2,y_2)$ dve tačke u ravni. Tada je

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$



Geometrijski (ili slobodni) vektor je proizvoljan par tačaka (A,B). U ravni u kojoj je uveden koordinatni sistem postoji jedna istaknuta tačka: koordinatni početak. Vektore koji ishode iz koordinatnog početka zovemo *vezani vektori*. Jasno je da za svaki vektor $\overrightarrow{AB}$ postoji tačka M takva da je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$, što znači da se pri radu sa vektorima možemo ograničiti samo na rad sa vezanim vektorima.

S druge strane, svaki vezani vektor je jednoznačno određen svojom krajnjom tačkom, dakle uređenim parom brojeva. Zbog toga ne pravimo razliku između tačke M i vektora $\overrightarrow{OM}$. Nekada nam je zgodno da na uređeni par brojeva (x,y) gledamo kao na koordinate tačke, a nekada kao na koordinate vektora. Na primer, nula-vektor ima koordinate $(0,0)$, isto kao tačka O. Često umesto „vektor čija završna tačka je (x,y)" kažemo samo „vektor (x,y)". Ako je data tačka M, vektor $\overrightarrow{OM}$ zovemo *vektor položaja tačke M*.

Operacije sa vezanim vektorima koji su dati svojim koordinatama se izvode veoma jednostavno; kažemo da se izvode *po koordinatama*. Neka su $\overrightarrow{v} = (x,y)$ i $\overrightarrow{w} = (x',y')$ neki vektori, a α realan broj. Tada je

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y'),\\
&\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = (x,y) - (x',y') = (x-x', y-y'),\\
&\alpha \cdot \overrightarrow{v} = \alpha \cdot (x,y) = (\alpha x, \alpha y),\\
&|\overrightarrow{v}| = d(O,(x,y)) = \sqrt{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Za ne-nula vektore $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ kažemo da su *paralelni* ako su njihovi nosači paralelni, odnosno, ako su istog pravca. Pišemo: $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$. Sada je lako pokazati sledeće:

Teorema 23. *Neka su $\overrightarrow{v} = (x,y)$ i $\overrightarrow{w} = (x',y')$ ne-nula vektori. Tada $\overrightarrow{v} \parallel \overrightarrow{w}$ ako i samo ako postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takvo da je $\alpha x = x'$ i $\alpha y = y'$, dok je $\overrightarrow{v} \uparrow\uparrow \overrightarrow{w}$ ako i samo ako postoji $\alpha > 0$ takvo da je $\alpha x = x'$ i $\alpha y = y'$.* ■

Jedinični vektor je vektor dužine 1. Za svaki ne-nula vektor $\overrightarrow{v}$ postoji jedinični vektor $\overrightarrow{v_0}$ koji ima isti pravac i smer kao $\overrightarrow{v}$. Vektor $\overrightarrow{v_0}$ se određuje tako što se vektor $\overrightarrow{v}$ podeli svojom dužinom: $\overrightarrow{v_0} = \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}$. Ovaj postupak se zove *normalizovanje vektora*.

Mi (homo sapiensi) zapravo umemo da računamo samo sa vezanim vektorima. Kada se u radu pojavi neki vektor čiji početak nije tačka O, odredi se njemu jednak vezani vektor sa kojim se kasnije nastavi računanje. Proces određivanja odgovarajućeg vezanog vektora je veoma jednostavan. Neka je $\overrightarrow{AB}$ neki geometrijski vektor, pri čemu je $A(x_1,y_1)$ i $B(x_2,y_2)$, i neka je $\overrightarrow{OM}$ njemu jednak vezani vektor. Želimo da odredimo koordinate tačke M, ili, što je isto, koordinate vektora $\overrightarrow{OM}$. To se može učiniti na sledeći način:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2,y_2) - (x_1,y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Primer. Odrediti koordinate vektora $\overrightarrow{AB}$ gde je $A(1,5)$ i $B(3,1)$, a potom ga normalizovati.

Rešenje. Pre svega, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3,1) - (1,5) = (2,-4)$. Odatle vidimo da je $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, pa se normalizovanjem vektora $\overrightarrow{AB}$ dobija vektor čije koordinate su $\frac{1}{2\sqrt{5}}(2,-4) = (\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5})$. □

Primer. Odrediti koordinate središta duži $[AB]$, gde je $A(x_1,y_1)$ i $B(x_2,y_2)$.

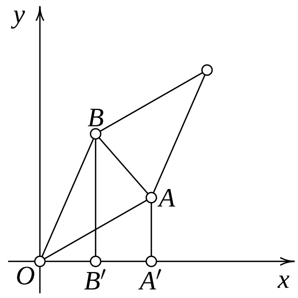
Rešenje. Neka je $S(x^*,y^*)$ središte duži $[AB]$. Tada tačka S deli vektor $\overrightarrow{AB}$ u odnosu 1 (nekad se još kaže i u odnosu 1 : 1), pa je $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$. Prelaskom na koordinate vektora i sređivanjem izraza dobijamo, konačno, da je $(x^*,y^*) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. $\square$

Primer. Odrediti koordinate tačaka koje duž $[AB]$ dele u odnosu 1 : 2, gde je $A(3,-1)$ i $B(-3,2)$.

Rešenje. Jasno je da postoje dve takve tačke. Jedna, označimo je sa P, se dobija iz veze $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$, a druga, označimo je sa Q, iz veze $\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$. Sada se lako vidi da je $P(-1,1)$ i $Q(1,0)$. $\square$

Teorema 24. *Neka su $A(x_1,y_1)$ i $B(x_2,y_2)$ tačke u ravni. Tada je površina paralelograma čije dve stranice su vektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ jednaka sa $|D|$, gde je*

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

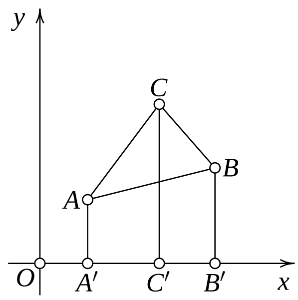


Dokaz. Dovoljno je dokazati da je površina trougla OAB jednaka sa $\frac{1}{2}\cdot|D|$. Neka su $A'(x_1,0)$ i $B'(x_2,0)$ normalne projekcije tačaka A i B, redom, na x-osu. Označimo sa P traženu površinu, sa P_1 površinu trougla OAA', sa P_2 površinu trougla OBB', a sa P_3 površinu trapeza $ABB'A'$. Primenjujući poznatu formulu za površinu trapeza dobijamo $P_3 = \frac{1}{2}(x_1-x_2)(y_1+y_2)$, dok je $P_1 = \frac{1}{2}x_1y_1$, a $P_2 = \frac{1}{2}x_2y_2$. Jasno je da je $P = P_3+P_2-P_1 = \frac{1}{2}(x_1-x_2)(y_1+y_2)+\frac{1}{2}x_2y_2-\frac{1}{2}x_1y_1 = \frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1) = \frac{1}{2}\cdot D$. Da je raspored tačaka na slici bio drugačiji, izrazi za površine bi se promenili do na znak, i tada bismo dobili da je $P = \frac{1}{2}(-D)$. Dakle, $P = \frac{1}{2}|D|$. $\blacksquare$

Na kraju ćemo izvesti formulu koja izražava površinu trougla ako su poznate koordinate njegovih temena.

Teorema 25. *Neka su $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ i $C(x_3,y_3)$ tri tačke i neka je P površina trougla ABC. Tada je $P = |D|$, gde je D sledeći broj:*

$$D = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$



Dokaz. Neka su $A'(x_1,0)$, $B'(x_2,0)$ i $C'(x_3,0)$ normalne projekcije tačaka A, B, C, redom, na x-osu. Označimo sa P_1 površinu trapeza $AA'C'C$, sa P_2 površinu trapeza $BB'C'C$, a sa P_3 površinu trapeza $AA'BB'$. Jasno je da je $P = P_1+P_2-P_3$. Primenjujući poznatu formulu za površinu trapeza dobijamo $P_1 = \frac{1}{2}(x_3-x_1)(y_3+y_1)$, $P_2 = \frac{1}{2}(x_2-x_3)(y_2+y_3)$, $P_3 = \frac{1}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1)$, pa je, nakon sređivanja, $P = \frac{1}{2}((x_2y_3-x_3y_2)-(x_1y_3-x_3y_1)+(x_1y_2-x_2y_1))$. Dakle,

$$P = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Pri tome smo koristili razvoj determinante reda 3 po elementima treće kolone. ■

Posledica 26. *Tačke $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ i $C(x_3,y_3)$ su kolinearne ako i samo ako je*

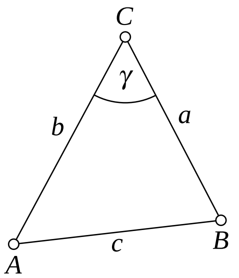
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka su tačke A, B i C kolinearne. Onda je površina trougla ABC jednaka nuli, pa je, prema Teoremi 25, navedena determinanta takođe jednaka nuli.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je navedena determinanta jednaka nuli. Tada je, prema Teoremi 25, površina trougla ABC jednaka nuli, odakle sledi da tačke A, B i C moraju ležati na istoj pravoj. ■

2.2 Skalarni proizvod vektora

U prethodnom odeljku smo videli kako se na osnovu Pitagorine teoreme lako dobija metod za merenje rastojanja dve tačke u ravni. U ovom odeljku ćemo uz pomoć jedne druge važne teoreme, kosinusne teoreme, opisati metod za merenje ugla koga zaklapaju dva vezana vektora. Podsetimo se, prvo, kosinusne teoreme:



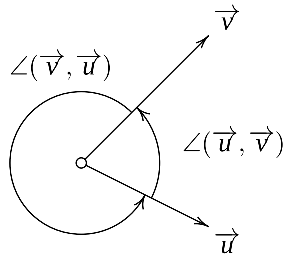
Teorema 27. *Neka su a, b i c dužine strana $[BC]$, $[CA]$ i $[AB]$, tim redom, trougla ABC, i neka je γ ugao kod temena C. Tada je $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.* ■

Sada ćemo uvesti novi pojam, pojam skalarnog proizvoda dva vektora, koji će nam omogućiti efektivno merenje uglova u ravni. *Skalarni proizvod* vektora $\vec{v} = (x,y)$ i $\vec{w} = (x',y')$, u oznaci $\vec{v}\cdot\vec{w}$, je sledeći *broj*:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = x\cdot x' + y\cdot y'.$$

Odatle i ime (skalar = broj). Za svaka tri vektora i za svaki realan broj α važe sledeći indetiteti:

- $\vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{w}\cdot\vec{v}$;
- $\vec{v}\cdot(\alpha\vec{w}) = (\alpha\vec{v})\cdot\vec{w} = \alpha(\vec{v}\cdot\vec{w})$;
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$.



Skalarni proizvod vektora ima veoma lepu geometrijsku interpretaciju za koju nam je potreban pojam ugla između dva vezana vektora. *Ugao između vezanih vektora* $\vec{u}$ i $\vec{v}$, u oznaci $\angle(\vec{u},\vec{v})$, je orijentisani ugao koga prebrišemo kada pođemo od vektora $\vec{u}$ i krećemo se do vektora $\vec{v}$ u smeru suprotnom od kazaljke na satu. Kako ćemo sve mere uglova u ovom kursu izražavati u radijanima, lako se vidi da je

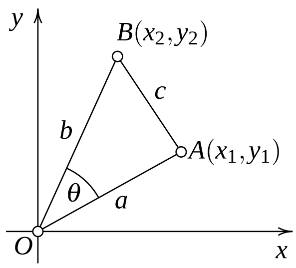
$$\angle(\vec{u},\vec{v}) + \angle(\vec{v},\vec{u}) = 2\pi.$$

Teorema 28. *Neka su $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ ne-nula vektori. Tada je:*

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

Prema tome:

$$\cos\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|}.$$



Dokaz. Neka su $A(x_1,y_1)$ i $B(x_2,y_2)$ krajnje tačke vektora $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$, redom. Neka je $a = |\overrightarrow{v}|$, $b = |\overrightarrow{w}|$ i $c = |\overrightarrow{AB}|$. Primenom kosinusne teoreme na trougao OAB dobijamo: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$, gde je $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Kako je $a = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $b = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ i $c = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, nakon uvrštavanja u gornji izraz, kvadriranja i sređivanja dobijamo: $x_1x_2 + y_1y_2 = ab\cos\theta$, odakle sledi tvrđenje. ∎

Kada u ovom kursu kažemo „izračunati (ili naći) ugao između vektora” zapravo mislimo na neku trigonometrijsku funkciju tog ugla koju lako možemo da odredimo. Kao što ćemo videti, umesto mernog broja ugla mnogo češće će nam biti potreban njegov sinus, kosinus ili tangens.

Primer. Naći ugao između vektora $\overrightarrow{v} = (1,2)$ i $\overrightarrow{w} = (3,0)$.

Rešenje. $\cos\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \sqrt{5}/5$. □

Kažemo da su vektori *normalni* ako je ugao između njih prav.

Posledica 29. *Ne-nula vektori $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ su normalni ako i samo ako je $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0$.* ∎

Da su vektori $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ normalni označavamo sa $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$. Po dogovoru se uzima da je nula-vektor normalan na svaki vektor, zato što je $(0,0) \cdot (x,y) = 0$, za svako (x,y). Uz ove dve konvencije, prethodni stav se kratko iskazuje ovako: $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$ ako i samo ako $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0$.

Osim merenja uglova, skalarni proizvod omogućuje i merenje dužina, kao što pokazuje sledeća teorema.

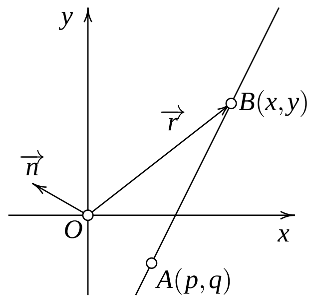
Teorema 30. *Za svaki vektor $\overrightarrow{v}$ je $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}$.*

Dokaz. Očito je $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos 0 = |\overrightarrow{v}|^2$, odakle tvrđenje odmah sledi. ∎

Dakle, skalarni proizvod vektora je moćno oruđe koje nam omogućuje da u ravni merimo dužine i uglove.

2.3 Prava u ravni

Kao što je tačka u ravni određena svojim koordinatama, tako je prava određena svojom *jednačinom*. Pravoj pripadaju tačno one tačke čije koordinate zadovoljavaju njenu jednačinu. U nastavku dajemo tri važna oblika jednačine prave: normalni, parametarski i eksplicitni.



Normalni oblik jednačine prave. Neka je $\vec{n} = (a,b)$ ne-nula vektor i $A(p,q)$ tačka u ravni. Odredimo jednačinu prave l koja prolazi kroz tačku A i normalna je na vektor $\vec{n}$.

Neka je $B(x,y)$ proizvoljna tačka prave l, a $\vec{r}$ njen vektor položaja. Tada su prave AB i l paralelne pa je $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$. To, dalje, znači da je $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, odnosno,

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \overrightarrow{OA}) = 0.$$

Kada uzmemo u obzir da je $\vec{n} = (a,b)$ i $\vec{r} - \overrightarrow{OA} = (x-p, y-q)$, gornja jednačina postaje $a(x-p)+b(y-q) = 0$. Nakon sređivanja i uvođenja oznake $c = -ap-bq$ dobijamo *normalni oblik jednačine prave*:

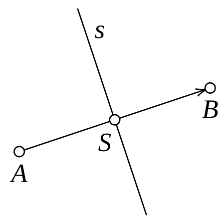
$$ax+by+c = 0.$$

Normalni oblik jednačine prave je zgodan između ostalog i zato što se iz njega veoma jednostavno očitava vektor na koga je prava normalna: to je (a,b). Važno je napomenuti da prava nema jedinstven normalni oblik jednačine. Zapravo, svaka prava ima beskonačno mnogo jednačina u normalnom obliku. Srećom, među njima postoji veza: svaki se može dobiti od svakog drugog množenjem ne-nula brojem. Na primer, $2x-y+3 = 0$ i $-4x+2y-6 = 0$ predstavljaju jednačine iste prave, zato što se druga dobija od prve množenjem sa -2.

Za jednačinu $ax+by+c = 0$ kažemo da je *normalizovana* ako je normalni vektor (a,b) dužine 1. Svaka jednačina $ax+by+c = 0$ se deljenjem sa $\sqrt{a^2+b^2}$ može svesti na normalizovani oblik.

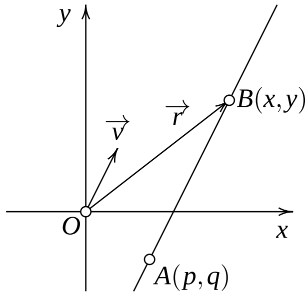
Primer. Odrediti jednačinu prave koja je normalna na vektor $(-1,2)$ i prolazi kroz tačku $(3,3)$. Odrediti potom normalizovani oblik jednačine ove prave.

Rešenje. Na osnovu prethodne diskusije, jednačina ove prave je $-(x-3)+2(y-3) = 0$, odnosno, nakon sređivanja, $-x+2y-3 = 0$. Normalizovani oblik jednačine prave se dobija deljenjem prethodne jednačine sa $\sqrt{5}$, što je dužina normalnog vektora: $-\frac{\sqrt{5}}{5}x + \frac{2\sqrt{5}}{5}y - \frac{3\sqrt{5}}{5} = 0$. □



Primer. Odrediti simetralu duži $[AB]$, gde je $A(1,2)$, $B(-3,-1)$.

Rešenje. Simetrala duži je prava koja sadrži središte S duži $[AB]$ i normalna je na pravu AB. Dakle, treba nam jednačina prave s koja prolazi kroz $S(-1,\frac{1}{2})$ i normalna je na vektor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-4,-3)$. Sada se lako vidi da prava s ima jednačinu $s : -4(x+1) - 3(y-\frac{1}{2}) = 0$. □



Parametarski oblik jednačine prave. Neka je $\vec{v} = (a,b)$ ne-nula vektor i $A(p,q)$ tačka u ravni. Odredimo jednačinu prave l koja prolazi kroz tačku A i paralelna je vektoru $\vec{v}$.

Neka je $B(x,y)$ proizvoljna tačka prave l, a $\vec{r}$ njen vektor položaja. Tada su prave AB i l paralelne pa je $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{v}$. To znači da postoji realan broj t takav da je $\overrightarrow{AB} = t\vec{v}$, odnosno, $(x-p, y-q) = t(a,b)$. Kada ovo raspišemo po koordinatama, dobijamo *parametarski oblik jednačine prave*:

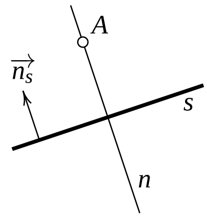
$$\begin{matrix} x = p + t\cdot a \\ y = q + t\cdot b \end{matrix}\ , \quad t \in \mathbb{R}.$$

O parametarskom obliku jednačine prave možemo da razmišljamo ovako: svakom realnom broju t odgovara tačno jedna tačka na pravoj, ona čije se koordinate dobijaju kada se u gornju jednačinu uvrsti t. Kada t prođe kroz ceo skup realnih brojeva, ovim budu „generisane" sve tačke na pravoj.

Parametarski oblik jednačine prave možemo shvatiti i kao način da se uspostavi bijekcija između skupa realnih brojeva i skupa svih tačaka neke prave. Kada parametar t ograničimo na neki podskup skupa $\mathbb{R}$, dobijamo parametarsku jednačinu odgovarajućeg podskupa prave. Tako, za $t \in [0,1]$ dobijamo parametarsku jednačinu duži $[AB]$, a za $t \in [0,+\infty)$ parametarsku jednačinu poluprave $[AB)$.

Primer. Odrediti parametarski oblik jednačine prave koja je paralelna vektoru $(2,3)$ i prolazi kroz tačku $(-1,4)$.

Rešenje. Parametarski oblik jednačine ove prave dat je sa $x = -1+2t$, $y = 4+3t$, $t \in \mathbb{R}$. $\square$



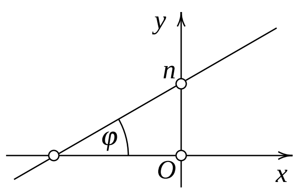
Primer. Odrediti normalu iz tačke $A(3,-1)$ na pravu $s : 2x+5y+3 = 0$.

Rešenje. Normala n iz tačke A na pravu s je prava koja sadrži A i paralelna je normalnom vektoru $\vec{n_s} = (2,5)$ prave s. Parametarski oblik jednačine prave n se sada lako dobija kao $x = 3+2t$, $y = -1+5t$. $\square$

Eksplicitni oblik jednačine prave. Posmatrajmo normalni oblik jednačine neke prave: $ax+by+c = 0$. Ako je $b = 0$, onda je $a \neq 0$ i lako se dobija

$$x = c',$$

za $c' = -c/a$. Ovo je *eksplicitni oblik jednačine prave normalne na x-osu*. Zaista, ako je prava normalna na x-osu u tački c', onda sve tačke te prave imaju c' za svoju x-koordinatu.



Ako je $b \neq 0$, onda iz $ax+by+c = 0$ možemo da izrazimo y. Jednostavnim računom dobijamo

$$y = kx+n$$

gde je $k = -a/b$ i $n = -c/b$. Ovo je *eksplicitni oblik jednačine prave koja nije normalna na x-osu*. Brojevi k i n imaju lepu i važnu geometrijsku interpretaciju. Broj n se zove *odsečak na y-osi*, zato što prava prolazi kroz tačku $(0,n)$, tj. preseca

y-osu u tački n. Broj k se zove *nagib* ili *koeficijent pravca* prave. On je jednak tangensu ugla koga prava zaklapa sa pozitivnim smerom x-ose: $k = \operatorname{tg}\varphi$.

Za razliku od normalnog i parametarskog oblika jednačine prave, svaka prava ima *tačno jedan* eksplicitni oblik jednačine.

Primer. Jednačina prave a u parametarskom obliku glasi ovako: $x = -1 + t$, $y = 4 - 2t$, $t \in \mathbb{R}$. Odrediti normalni i eksplicitni oblik jednačine prave a.

Rešenje. Ako izrazimo parametar t, dobijamo, s jedne strane $t = x + 1$, a s druge strane $t = 2 - \frac{y}{2}$. Odatle je $x + 1 = 2 - \frac{y}{2}$, odnosno, $x + \frac{y}{2} - 1 = 0$. Eksplicitni oblik jednačine prave sada glasi $y = -2x + 2$. $\square$

2.4 Tačka i prava

U ovom odeljku nas interesuje u kom se odnosu nalaze data prava i data tačka. Razmatraćemo sledeća tri problema:

- da li data tačka pripada datoj pravoj;
- kako izgleda jednačina prave koja je određena dvema tačkama; i
- na kom rastojanju je data tačka od date prave.

Incidencija. Neka je jednačina prave data u normalnom ili eksplicitnom obliku. Tačka pripada pravoj ako koordinate tačke zadovoljavaju jednačinu prave. Pokazaćemo to na primerima. Tačka $(2,1)$ pripada pravoj $4x - y - 7 = 0$ zato što je $4 \cdot 2 - 1 - 7 = 0$, dok joj tačka $(1,2)$ ne pripada. Tačka $(2,1)$ pripada pravoj $y = 3x - 5$, dok joj tačka $(0,0)$ ne pripada. Slično, tačka $(3,7)$ pripada pravoj $x = 3$, dok joj tačka $(2,1)$ ne pripada.

Ako je jednačina prave data u parametarskom obliku, tada u odgovarajući par jednačina uvrstimo koordinate tačke i rešimo jednačine po t. Ako dobijemo istu vrednost za t onda tačka pripada pravoj. U suprotnom joj ne pripada. Na primer, ispitajmo da li tačke $(-1,8)$ i $(2,2)$ pripadaju pravoj $x = 2 - t$, $y = -1 + 3t$, $t \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem koordinata prve tačke dobijamo jednačine $-1 = 2 - t$, $8 = -1 + 3t$, čija rešenja po t su $t = 3$ i $t = 3$. Prva tačka, dakle, pripada pravoj. Za drugu tačku dobijamo $2 = 2 - t$ i $2 = -1 + 3t$, odnosno, $t = 0$ i $t = 1$. Zato ona ne pripada datoj pravoj.

Jednačina prave kroz dve date tačke. Krenimo od jednog primera: odrediti jednačinu prave koja sadrži tačke $A(2,1)$ i $B(4,4)$. Jednačinu prave ćemo prvo potražiti u normalnom obliku. Za to nam je potrebna jedna tačka kroz koju prava prolazi, recimo A, i potreban nam je vektor normalan na pravu. Neka je $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2,3)$. Za vektor koji je normalan na pravu tada možemo uzeti bilo koji vektor koji je normalan na $\overrightarrow{OM}$, recimo $\overrightarrow{n} = (3,-2)$. Tako dobijamo sledeću jednačinu prave AB:

$$3(x-2) - 2(y-1) = 0.$$

Parametarski oblik jednačine prave AB se dobija još lakše: očito je prava AB paralelna vektoru $\overrightarrow{OM}$ i prolazi kroz tačku A, pa parametarski oblik jednačine prave izgleda ovako:

$$\begin{array}{l} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 3t \end{array}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

U opštem slučaju, imamo sledeću teoremu:

Teorema 31. *Jednačina prave kroz dve različite tačke $A(p_1, q_1)$ i $B(p_2, q_2)$ u normalnom obliku data je sa*

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

dok je njen parametarski oblik dat sa

$$\begin{array}{l} x = p_1 + (p_2 - p_1)t \\ y = q_1 + (q_2 - q_1)t \end{array}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Neka je $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB} = (p_2 - p_1, q_2 - q_1)$. Da bismo odredili normalni oblik jednačine prave AB posmatrajmo tačku A i vektor $\overrightarrow{n} = (q_1 - q_2, -(p_1 - p_2))$ koji je normalan na $\overrightarrow{OM}$, pa time i na pravu AB. Dobijamo sledeći oblik jednačine prave:

$$(q_1 - q_2)(x - p_1) - (p_1 - p_2)(y - q_1) = 0$$

odnosno,

$$(q_1 - q_2)x - (p_1 - p_2)y + (p_1 q_2 - p_2 q_1) = 0,$$

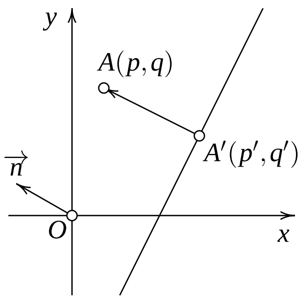
što je očigledno ekvivalentno jednačini sa determinantom u formulaciji teoreme (pri čemo smo koristili razvoj determinante reda 3 po elementima poslednje kolone, kao i definiciju determinante reda 2).

Da bismo odredili parametarski oblik jednačine prave AB dovoljno je uočiti tačku A i vektor $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ kome je prava paralelna. ■

Rastojanje tačke od prave. Neka je $ax + by + c = 0$ jednačina neke prave, neka je $A(p, q)$ neka tačka i $\lambda_A = ap + bq + c$. Kada tačka A pripada pravoj, onda je $\lambda_A = 0$. U suprotnom, λ_A je neki broj različit od nule. Kao što ćemo pokazati, na osnovu broja λ_A se može utvrditi rastojanje date tačke od date prave, kao i poluravan s obzirom na tu pravu kojoj tačka pripada.

Teorema 32. *Neka je $ax + by + c = 0$ normalizovana jednačina prave l (to znači da je $a^2 + b^2 = 1$), neka je $A(p, q)$ neka tačka i $\lambda_A = ap + bq + c$. Tada je broj $|\lambda_A|$ jednak rastojanju tačke A od prave l. Ako je $\lambda_A > 0$ onda se tačka A nalazi u onoj poluravni s obzirom na pravu l na koju pokazuje normalni vektor prave l; ako je $\lambda_A < 0$, tačka A se nalazi u drugoj poluravni.*

Dokaz. Ako tačka A pripada pravoj l, onda je $\lambda_A = 0$, a to i jeste rastojanje tačke A od prave l. Pretpostavimo, zato, da tačka A ne pripada pravoj l.



Neka je $\vec{n} = (a,b)$ normalni vektor prave l. Prema pretpostavci je $|\vec{n}| = 1$. Označimo sa $A'(p',q')$ ortogonalnu projekciju tačke A na pravu l. Vektori $\overrightarrow{A'A}$ i $\vec{n}$ su paralelni (oba su normalni na pravu l), pa postoji broj α takav da je $\overrightarrow{A'A} = \alpha\vec{n}$. Zato što je $\vec{n}$ jedinični vektor, broj $|\alpha|$ je jednak rastojanju tačke A od prave l. Ako je $\alpha > 0$, onda su vektori $\overrightarrow{A'A}$ i $\vec{n}$ istog smera, što znači da se tačka A nalazi u onoj poluravni s obzirom na pravu l na koju pokazuje $\vec{n}$. Ako je $\alpha < 0$, vektori su suprotnog smera, pa se tačka A nalazi u drugoj poluravni. Pokazaćemo da je $\alpha = \lambda_A$.

Iz $\overrightarrow{A'A} = \alpha\vec{n}$ dobijamo da je $(p-p', q-q') = \alpha(a,b)$, odakle je $p' = p - \alpha a$ i $q' = q - \alpha b$. Tačka A' pripada pravoj l, pa zadovoljava njenu jednačinu. Odatle je $ap' + bq' + c = 0$. Nakon uvrštavanja gornjih izraza za p' i q' dobijamo $ap + bq + c - \alpha(a^2+b^2) = 0$. Kako je $a^2+b^2 = 1$, to je $\alpha = ap+bq+c = \lambda_A$. ■

Posledica 33. *Neka je $ax+by+c=0$ jednačina prave l i $A(p,q)$ neka tačka. Rastojanje tačke A od prave l je dato sa:*

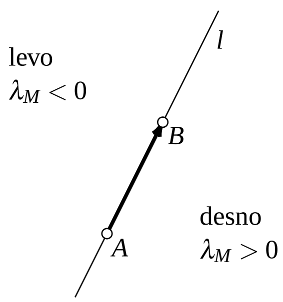
$$\left|\frac{ap+bq+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|.$$

Dokaz. Prema prethodnoj teoremi, rastojanje tačke od prave se dobija tako što se uzme apsolutna vrednost broja koji se dobija uvrštavanjem koordinata tačke u *normalizovanu* jednačinu prave u normalnom obliku. ■

Levo-desno. Neka su $A(p_1,q_1)$ i $B(p_2,q_2)$ dve tačke prave l. Ako pravu l orijentišemo tako da bude istog smera kao vektor $\overrightarrow{AB}$, onda možemo govoriti o „levoj” i „desnoj” poluravni s obzirom na pravu l. Formirajmo jednačinu prave l baš ovako:

$$(q_2-q_1)x - (p_2-p_1)y + q_1p_2 - p_1q_2 = 0.$$

i za tačku $M(x_0,y_0)$ stavimo



$$\lambda_M = (q_2-q_1)x_0 - (p_2-p_1)y_0 + q_1p_2 - p_1q_2.$$

Na osnovu znaka broja λ_M utvrđujemo da li tačka M leži u desnoj ili levoj poluravni:

- ako je $\lambda_M = 0$, tačka M leži na pravoj l;
- ako je $\lambda_M > 0$, tačka M leži u desnoj poluravni;
- ako je $\lambda_M < 0$, tačka M leži u levoj poluravni.

2.5 Dve prave

Sada ćemo videti kako se analitičkim sredstvima utvrđuje u kom odnosu se nalaze dve prave. Videćemo kako se utvrđuje da li se prave poklapaju, da li su paralelne, da li se seku i da li su ortogonalne.

Paralelnost i poklapanje. Paralelnost i poklapanje pravih se veoma jednostavno detektuju. Neka su $ax+by+c=0$ i $a'x+b'y+c'=0$ jednačine dve prave. Ove dve prave su paralelne ako i samo ako postoji broj k takav da je $a'=ka$ i $b'=kb$. Ako je pri tome i $c'=kc$, prave se poklapaju. Ako je $c'\neq kc$, onda nemaju zajedničkih tačaka.

Na primer, neka su date sledeće četiri prave: $a: 2x-y+3=0$, $b: 4x-2y+6=0$, $c: 4x-2y+1=0$ i $d: x-y+1=0$. Prave a i b se poklapaju i svaka od njih je paralelna sa pravom c, ali sa njom nema zajedničkih tačaka. Prave c i d se seku.

Presek dve prave. Neka su $ax+by+c=0$ i $a'x+b'y+c'=0$ jednačine dve prave. Ako neka tačka pripada obema pravim, onda njene koordinate zadovoljavaju obe jednačine, pa se mogu dobiti rešavanjem sistema

$$ax+by+c=0, \qquad a'x+b'y+c'=0.$$

Na primer, da bismo odrediti presečnu tačku pravih $2x-3y-4=0$ i $x+2y+5=0$ rešimo sistem

$$2x-3y-4=0, \qquad x+2y+5=0$$

i tako nalazimo $x=-1$, $y=-2$. Dakle, tačka $(-1,-2)$ je presečna tačka dve date prave.

Rešavanjem sistema jednačina mogu da nastanu tri situacije: da sistem ima tačno jedno rešenje, da sistem ima beskonačno mnogo rešenja, i da sistem nema rešenja. U prvom slučaju odgovarajuće prave se seku, u drugom slučaju se poklapaju, a u trećem su paralelne i različite.

Ortogonalnost dve prave. Dve prave su ortogonalne ako i samo ako to važi za njihove normalne vektore. Odatle dobijamo da su prave $ax+by+c=0$ i $a'x+b'y+c'=0$ ortogonalne ako i samo ako je $aa'+bb'=0$. Ukoliko su jednačine prave zadate eksplicitno, dobijamo da su prave $y=k_1x+n_1$ i $y=k_2x+n_2$ ortogonalne ako i samo ako je $k_1k_2=-1$. (Zanimljiv je i slučaj $x=c'$ i $y=kx+n$ gde se lako vidi da su prave ortogonalne ako i samo ako je $k=0$.)

Sada ćemo pokazati kako se izvode tri elementarne konstrukcije koje su u vezi sa ortogonalnim pravim: konstrukcija normale iz tačke na pravu, konstrukcija ortogonalne projekcije tačke na pravu i konstrukcija tačke simetrične datoj tački s obzirom na datu pravu. Neka je l prava čiji normalni vektor je $\vec{n}$ i neka je A proizvoljna tačka.

- Neka je m normala iz tačke A na pravu l. Zbog $m\perp l$ mora biti $m \parallel \vec{n}$, odakle se lako dobija parametarski oblik jednačine prave m: $\vec{r}=\overrightarrow{OA}+t\vec{n}$, $t\in\mathbb{R}$.
- Neka je A_0 ortogonalna projekcija tačke A na pravu l. Tačka A_0 je presek prave l i normale m iz A.
- Neka je A' tačka simetrična tački A u odnosu na pravu l. Tačka A_0 je središte duži $[AA']$, pa je, $\overrightarrow{OA_0}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'})$. Rešavanjem ove jednačine po $\overrightarrow{OA'}$ nalazimo koordinate tačke A'.

Primer. Naći tačku koja je simetrična tački $A(2,1)$ u odnosu na pravu $l: x+2y-8=0$.

Rešenje. Nađimo prvo jednačinu prave m koja sadrži tačku A i normalna je na pravu l. Njena parametarska jednačina je $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{n}$, gde je $\overrightarrow{n}$ normalni vektor prave l. Odatle je

$$(x,y) = (2,1) + t(1,2),$$

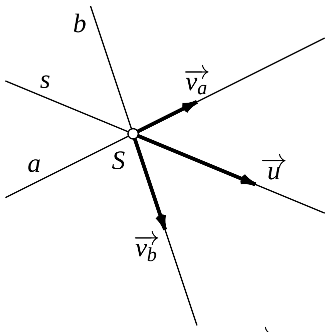
pa je $x = 2+t$, $y = 1+2t$, $t \in \mathbb{R}$. Sledeći korak je da se nađe presek pravih l i m, odnosno projekcija tačke A na pravu l. Pokazaćemo kako se to radi bez transformacije jednačine prave m u normalni oblik. Koordinate tačke koju tražimo zadovoljavaju jednačine obe prave, tako da mora biti

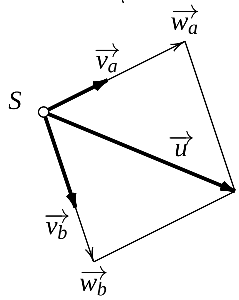
$$x+2y-8=0, \qquad x=2+t, \qquad y=1+2t.$$

Uvrštavanjem druge i treće jednačine u prvu, dobijamo $t = 4/5$. To znači da se radi o onoj tački prave m koja se dobija za $t = 4/5$, a to je tačka $A_0(14/5, 13/5)$. Tačka A_0 je središte duži $[AA']$. Ako pretpostavimo da tačka A' ima koordinate (p,q), onda je

$$\frac{14}{5} = \frac{1}{2}(2+p), \qquad \frac{13}{5} = \frac{1}{2}(1+q).$$

Odatle je $p = 18/5$, $q = 21/5$, i tražena tačka je $A'(18/5, 21/5)$. $\Box$





Primer. Odrediti simetralu s ugla koga zaklapaju prave $a: x = 2+2t, y = 2+t$ i $b: x = 5+t, y = -3t$.

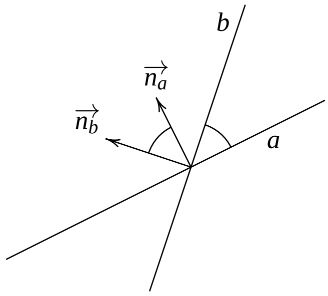
Rešenje. Prave a i b se seku u tački $S(4,3)$, i to je tačka kroz koju prolazi prava s. Sada ćemo odrediti vektor $\overrightarrow{u}$ kome je prava s paralelna. Iz uslova zadatka vidimo da je $\overrightarrow{v_a} = (2,1)$ vektor pravca prave a, a $\overrightarrow{v_b} = (1,-3)$ vektor pravca prave b. Neka su $\overrightarrow{w_a}$ i $\overrightarrow{w_b}$ vektori odabrani tako da $\overrightarrow{v_a}$ i $\overrightarrow{w_a}$ imaju isti pravac i smer, da $\overrightarrow{v_b}$ i $\overrightarrow{w_b}$ imaju isti pravac i smer, i da je $|\overrightarrow{w_a}| = |\overrightarrow{w_b}|$, tada se lako zaključuje da je $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{w_a} + \overrightarrow{w_b}$ vektor pravca prave s. Vektori $\overrightarrow{w_a}$ i $\overrightarrow{w_b}$ se mogu dobiti normalizacijom vektora $\overrightarrow{v_a}$ i $\overrightarrow{v_b}$. Budući da je u našem primeru $|\overrightarrow{v_a}| = \sqrt{5}$ i $|\overrightarrow{v_b}| = \sqrt{10}$, umesto normalizovanih vektora možemo odabrati $\overrightarrow{w_a} = \sqrt{2}\cdot\overrightarrow{v_a} = (2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ i $\overrightarrow{w_b} = \overrightarrow{v_b}$. Dakle, za vektor pravca prave s možemo uzeti $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{w_a} + \overrightarrow{w_b} = (2\sqrt{2}+1, \sqrt{2}-3)$, pa parametarski oblik prave s glasi $s: x = 4 + (2\sqrt{2}+1)t, y = 3 + (\sqrt{2}-3)t$. $\Box$

Ugao između dve prave. Određivanje ugla koga zaklapaju dve prave svodi se, zapravo, na određivanje ugla koga zaklapaju njihovi normalni vektori, zato što se radi o uglovima sa normalnim kracima koji su jednaki. Dakle, ako se prave $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ i $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ seku pod uglom θ, onda je

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

Primer. Odrediti ugao koga zaklapaju prave $a: x-2y+1=0$ i $b: 3x-y-4=0$.

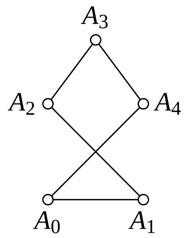
Rešenje. Primetimo da je ugao koga zaklapaju prave a i b jednak uglu koga zaklapaju njihovi normalni vektori $\overrightarrow{n_a}$ i $\overrightarrow{n_b}$. Kako je $\overrightarrow{n_a}=(1,-2)$ i $\overrightarrow{n_b}=(3,-1)$, lako se dobija da je $\cos\angle(a,b)=\cos\angle(\overrightarrow{n_a},\overrightarrow{n_b})=\sqrt{2}/2$. $\square$



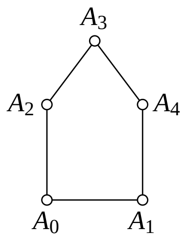
2.6 Poligoni

Neka su $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$, $n \geqslant 3$, različite tačke u ravni. Figuru $\Pi = [A_0A_1] \cup [A_1A_2] \cup \ldots \cup [A_{n-2}A_{n-1}] \cup [A_{n-1}A_0]$ zovemo *poligon* ili *poligonalna linija*. Poligon kraće označavamo sa $\Pi = A_0A_1 \ldots A_{n-1}$. Tačke $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ zovemo *temena*, a duži $[A_iA_{i+1}]$, $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ *strane* poligona. (Pri radu sa poligonima simbol $i+1$ uvek označava sabiranje po modulu n, gde je n broj temena poligona; dakle, $i+1$ je sledeći broj u cikličnom rasporedu brojeva $0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ i pogodan je zato što za $i=n-1$ imamo da je $[A_iA_{i+1}]=[A_{n-1}A_0]$.)

Primetimo da je redosled temena u zapisu poligona izuzetno značajan, jer ista temena navedena drugim redom mogu da predstavljaju sasvim drugačiju figuru, kako to pokazuje primer pored.



$\Pi = A_0A_1A_2A_3A_4$



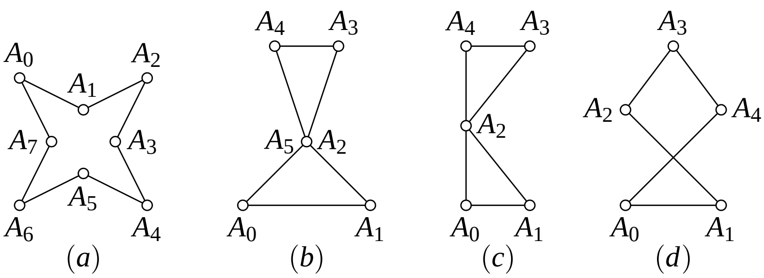
$\Pi = A_0A_1A_4A_3A_2$

Za temena A_i i A_{i+1} kažemo da su *susedna*. Temena A_i i A_j su *nesusedna* ako nisu susedna, odnosno, ako je $i+1 \neq j$ i $j+1 \neq i$. Ako su A_i i A_j nesusedna temena, duž $[A_iA_j]$ zovemo *dijagonala* poligona. Za strane $[A_{i-1}A_i]$ i $[A_iA_{i+1}]$ poligona Π kažemo da su *susedne strane poligona*.

Poligon $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ je *prost* ako nema samopreseke, odnosno, ako je ispunjeno sledeće:

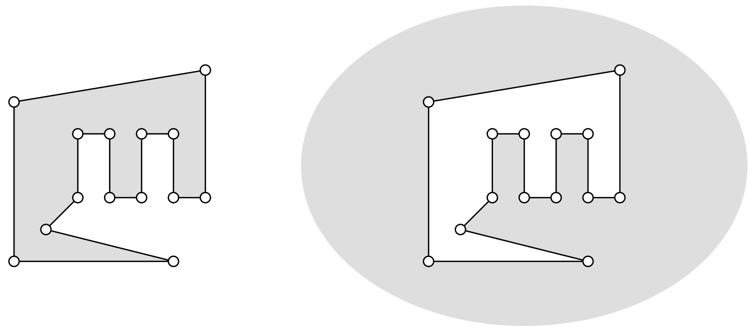
- sva temena poligona su različita: $A_i \neq A_j$ kadgod je $i \neq j$;
- nijedno teme poligona ne leži na strani koju određuju neka druga dva temena poligona; i
- svake dve nesusedne strane su disjunktne.

Na slici ispod figura (a) predstavlja jedan prost poligon, dok su figure (b), (c) i (d) primeri poligona koji nisu prosti:



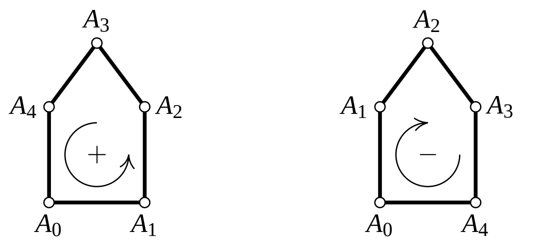
Poligon na slici (b) nije prost zato što se dva njegova temena (A_2 i A_5) poklapaju. Poligon na slici (c) nije prost zato što jedno njegovo teme (A_2) pripada strani koju određuju neka druga dva temena ($[A_0A_4]$). Poligon na slici (d) nije prost zato što ima dve nesusedne strane ($[A_0A_4]$ i $[A_1A_2]$) koje se seku.

Intuitivno je jasno da svaki prost poligon razbija ravan na dva dela, njegovu *unutrašnjost* i *spoljašnjost*:



Površina poligona je površina njegove unutrašnjosti.

Redosled kojim navodimo temena u zapisu poligona može da utiče ne samo na geometriju poligona, već i na njegovu orijentaciju. Poligon može biti *pozitivno* ili *negativno* orijentisan, kako je to pokazano na sledećoj slici:



$\Pi = A_0A_1A_2A_3A_4$ $\quad$ $\Pi = A_0A_1A_2A_3A_4$

Sledeća teorema pokazuje kako se površina i orijentacija poligona mogu odrediti na osnovu jednostavne formule.

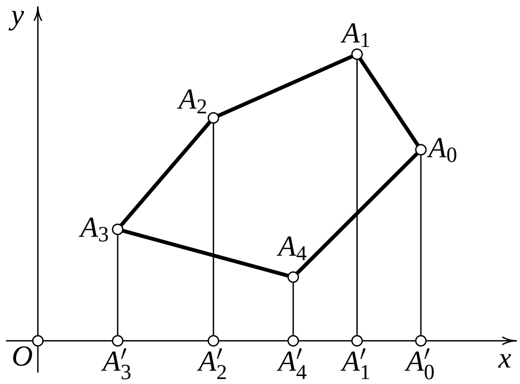
Teorema 34. *Neka je* $\Pi = A_0A_1\dots A_{n-1}$ *prost poligon sa temenima* $A_i(x_i, y_i)$, $i = 0\dots n-1$, *i neka je*

$$D = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix}.$$

Tada je $|D|$ *merni broj površine poligona* Π. *Ako je* $D > 0$, *poligon je pozitivno orijentisan, a ako je* $D < 0$, *poligon je negativno orijentisan. Broj D se zato zove* označena površina poligona Π.

Dokaz. Neka je poligon Π pozitivno orijentisan i neka su $A_i'(x_i, 0)$, $i = 0\dots n-1$, projekcije temena poligona na x-osu, Sl. 2.1.

Posmatrajmo brojeve $P_i = \frac{1}{2}(x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1})$. Apsolutna vrednost broja P_i jednaka je površini trapeza $A_i'A_iA_{i+1}A_{i+1}'$. Pri tome, broj P_i je pozitivan ako je odgovarajući trapez pozitivno orijentisan; inače je negativan. Na primer, za poligon prikazan na Sl. 2.1, brojevi P_0, P_1 i P_2 su pozitivni, dok su brojevi P_3 i P_4 negativni. Primetimo, dalje, da je broj $|P_0 + P_1 + \dots + P_{n-1}|$ jednak površini poligona Π. Ilustrujmo to na primeru poligona na Sl. 2.1. Broj $P_0 + P_1 + P_2$ jednak je



Slika 2.1: Određivanje površine i orijentacije poligona

površini šestougla $A'_0A_0A_1A_2A_3A'_3$, dok je broj P_3+P_4 jednak negativnoj površini petougla $A'_0A_0A_4A_3A'_3$. Broj $P_0+P_1+P_2+P_3+P_4$ jednak je tako razlici površina pomenute dve figure, a to je tačno površina poligona $A_0A_1A_2A_3A_4$. Primetimo, takođe, da je zbir $P_0+P_1+\ldots+P_{n-1}$ pozitivan kada je poligon pozitivno orijentisan, i da je negativan kada je poligon negativno orijentisan. (Intuitivno, u prvom slučaju je ,,pozitivna" površina veća po apsolutnoj vrednosti, dok je u drugom slučaju ,,negativna" površina veća po apsolutnoj vrednosti.)

Pokažimo još da je $P_0+P_1+\ldots+P_{n-1}=D$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} P_i &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}(x_i-x_{i+1})(y_i+y_{i+1}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(x_iy_i+x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i-x_{i+1}y_{i+1}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+\sum_{i=0}^{n-1}(x_iy_i-x_{i+1}y_{i+1})\right).
\end{aligned}$$

Kako je $\sum_{i=0}^{n-1}(x_iy_i-x_{i+1}y_{i+1})=\sum_{i=0}^{n-1}x_iy_i-\sum_{i=0}^{n-1}x_{i+1}y_{i+1}=0$, dobijamo

$$\sum_{i=0}^{n-1} P_i=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)=D,$$

gde smo koristili definiciju determinante 2×2. Ovim je dokaz završen. ■

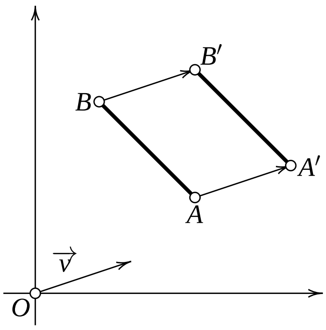
2.7 Transformacije u ravni

Transformacije podudarnosti. Preslikavanje f ravni na sebe je *transformacija podudarnosti* ako je f bijekcija koja ima sledeću osobinu: za svake dve različite tačke A i B je $[AB] \cong [f(A)\, f(B)]$. *Osnovna teorema euklidske geometrije* nam daje klasifikaciju transformacija podudarnosti euklidske ravni:

Teorema 35. *Transformacija podudarnosti u ravni je*

- *ili identičko preslikavanje;*
- *ili osna simetrija;*
- *ili translacija;*
- *ili centralna simetrija;*
- *ili rotacija;*
- *ili klizna simetrija.* ■

U nastavku dajemo definicije ovih transformacija, njihove analitičke oblike i osnovne osobine.

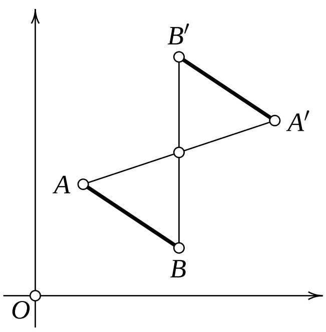


Translacija. *Translacija za vektor* $\vec{v}$, u oznaci $\tau_{\vec{v}}$, je preslikavanje ravni na sebe sa sledećom osobinom: ako je $\tau_{\vec{v}}(A) = A'$, onda je $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$.

Da bismo dobili analitički izraz za translaciju, uzmimo da vektor $\vec{v}$ ima koordinate (a,b). Neka tačka A ima koordinate (x,y), a tačka $A' := \tau_{\vec{v}}(A)$ koordinate (x',y'). Po definiciji je $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$, odakle je $(x'-x, y'-y) = (a,b)$. Tako dobijamo

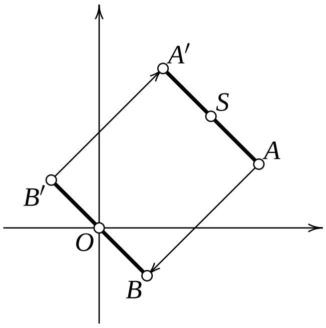
$$x' = x + a$$
$$y' = y + b.$$

Pišemo i ovako: $(x,y) \xrightarrow{\tau_{\vec{v}}} (x+a, y+b)$.



Centralna simetrija. *Centralna simetrija u odnosu na tačku S*, u oznaci σ_S, je preslikavanje ravni na sebe sa sledećom osobinom: ako je $\sigma_S(A) = A'$, onda je tačka S središte duži $[AA']$.

Analitički izraz za centralnu simetriju dobijamo iz definicije. Neka je $S(p,q)$ centar simetrije i neka je $\sigma_S(A) = A'$, gde tačka A ima koordinate (x,y), a tačka A' koordinate (x',y'). Prema definiciji, S je središte duži $[AA']$, pa je $\frac{x+x'}{2} = p$ i $\frac{y+y'}{2} = q$. Odatle dobijamo



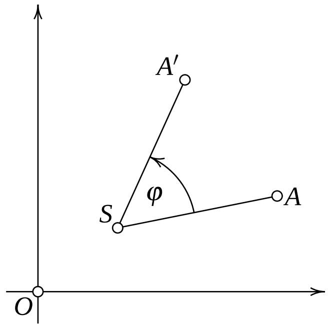
$$x' = 2p - x$$
$$y' = 2q - y.$$

Specijalno, simetrija u odnosu na koordinatni početak ima sledeći analitički izraz: $x' = -x, y' = -y$.

Primetimo da se centralna simetrija u odnosu na neku tačku S može predstaviti kao proizvod dve translacije i centralne simetrije u odnosu na koordinatni početak, odnosno, da je $\sigma_S = \tau_{\overrightarrow{OS}} \circ \sigma_O \circ \tau_{\overrightarrow{SO}}$.

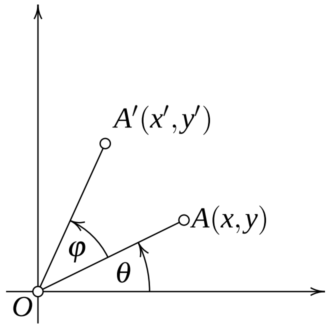
Jednostavnosti radi, označimo $\tau_{\overrightarrow{OS}}$ sa τ. Onda je $\tau_{\overrightarrow{SO}} = \tau^{-1}$. Pogledajmo kako transformacija $\tau_{\overrightarrow{OS}} \circ \sigma_O \circ \tau_{\overrightarrow{SO}}$ deluje na proizvoljnu tačku (x,y):

$$\begin{aligned}
\underbrace{(x,y)}_{A} &\xrightarrow{\tau^{-1}} \underbrace{(x-p,y-q)}_{B} \\
&\xrightarrow{\sigma_O} \underbrace{(p-x,q-y)}_{B'} \\
&\xrightarrow{\tau} \underbrace{(2p-x,2q-y)}_{A'}.
\end{aligned}$$



Rotacija. *Rotacija oko tačke S za orijentisani ugao* φ, u oznaci ρ_S^{φ}, je preslikavanje ravni na sebe sa sledećom osobinom: ako je $\rho_S^{\varphi}(A) = A'$, onda je $[SA] \cong [SA']$ i orijentisani ugao ASA' jednak je φ. (Očito, za rotaciju je bitno da znamo ne samo veličinu ugla već i *smer* rotacije. Zato je važno da ugao ASA' posmatramo kao orijentisani ugao.)

Prvo ćemo izvesti analitički izraz za rotaciju oko koordinatnog početka. Neka je $A(x,y)$ proizvoljna tačka i neka je $\rho_O^{\varphi}(A) = A'$, gde tačka A' ima koordinate (x',y'). Tada je $\angle AOA' = \varphi$. Neka je θ ugao između x-ose i vektora $\overrightarrow{OA}$ kao na slici pored. Ako dužinu duži $[OA]$ označimo sa r, onda je (polarne koordinate tačke):



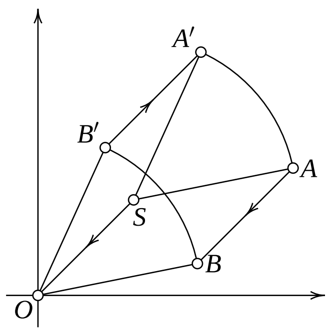
$$\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta \\
x' &= r\cos(\theta+\varphi) \\
y' &= r\sin(\theta+\varphi).
\end{aligned}$$

Kada raspišemo izraze za x' i y' prema odgovarajućim adicionim formulama dobijamo:

$$\begin{aligned}
x' &= r\cos\theta\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi \\
y' &= r\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\sin\varphi.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem izraza za x i y, na kraju dobijamo:

$$\begin{aligned}
x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi \\
y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi.
\end{aligned}$$



Da bismo odredili analitički izraz rotacije oko proizvoljne tačke, prvo ćemo primetiti da se, slično centralnoj simetriji, i rotacija oko proizvoljne tačke može predstaviti u obliku proizvoda translacije, rotacije oko koordinatnog početka i još jedne translacije. Preciznije, neka je S proizvoljna tačka i φ orijentisani ugao. Tada je $\rho_S^{\varphi} = \tau_{\overrightarrow{OS}} \circ \rho_O^{\varphi} \circ \tau_{\overrightarrow{SO}}$. Sada se lako dobija da rotacija oko tačke $S(p,q)$ za ugao φ ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
x' &= (x-p)\cos\varphi - (y-q)\sin\varphi + p \\
y' &= (x-p)\sin\varphi + (y-q)\cos\varphi + q.
\end{aligned}$$

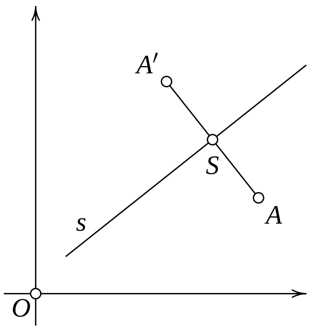
Rotacija i kompleksni brojevi. Rotacija tačke za ugao φ oko koordinatnog početka ima veoma jednostavnu interpretaciju preko kompleksnih brojeva. Neka je $z = x + iy$ kompleksni broj koji odgovara tački $A(x,y)$, neka je

$$q = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

posebno odabran kompleksni broj. Dalje, neka je $z' = x' + iy'$ kompleksni broj koji se dobija kao $z' = z \cdot q$. Tada se lako vidi da je

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi, \end{aligned}$$

odnosno, da kompleksni broj z' opisuje tačku koja se dobija rotacijom tačke A za ugao φ oko koordinatnog početka. Zato kažemo da kompleksni broj q „opisuje rotaciju za ugao θ oko koordinatnog početka”.



Osna simetrija. *Osna simetrija u odnosu na pravu s*, u oznaci σ_s, je preslikavanje ravni na sebe sa sledećom osobinom: ako je $\sigma_s(A) = A'$, onda je prava s simetrala duži $[AA']$. Specijalno, ako je $A \in s$, onda je $\sigma_s(A) = A$.

Potražimo analitički oblik osne simetrije u odnosu na pravu $s : ax+by+c = 0$. Neka je $A(x_0,y_0)$ proizvoljna tačka u ravni i neka je $A'(x_1,y_1) = \sigma_s(A)$. Nađimo, prvo, koordinate (u,v) tačke S u kojoj se prave s i AA' seku. Lako se nalazi parametarski oblik prave AA' zato što ona prolazi kroz tačku A i paralelna je vektoru (a,b) koji je normalan na pravu s:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \end{aligned}\ , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ako je t^* parametar koji odgovara tački S, koja je presek pravih s i AA', lako se vidi da je

$$a(x_0 + at^*) + b(y_0 + bt^*) + c = 0$$

odakle je

$$t^* = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}.$$

Dakle, koordinate tačke S su

$$u = x_0 + at^*, \quad v = y_0 + bt^*.$$

Kako je $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AS}$, tački A' odgovara parametar $2t^*$ i zato je

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + 2at^*, \\ y_1 &= y_0 + 2bt^*. \end{aligned}$$

Ako je osa simetrije neka specijalna prava, onda analitički izraz osne simetrije dobija posebno lep oblik. Neka je s_1 prava $y = x$, a s_2 prava $y = -x$. Tada:

$$\begin{aligned} \sigma_{Ox} :&\quad x' = x, & y' &= -y; \\ \sigma_{Oy} :&\quad x' = -x, & y' &= y; \\ \sigma_{s_1} :&\quad x' = y, & y' &= x; \\ \sigma_{s_2} :&\quad x' = -y, & y' &= -x. \end{aligned}$$

Klizna simetrija. *Klizna simetrija u pravcu s i za vektor $\vec{v}$, gde je $s \parallel \vec{v}$* (oznaka $\kappa_s^{\vec{v}}$) je kompozicija translacije za vektor $\vec{v}$ i osne simetrije u odnosu na pravu s:

$$\kappa_s^{\vec{v}} = \sigma_s \circ \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{v}} \circ \sigma_s.$$

Klizna simetrija je kompozicija dve transformacije podudarnosti, i time transformacija podudarnosti. Ona u ovom kursu neće biti od šireg interesa.

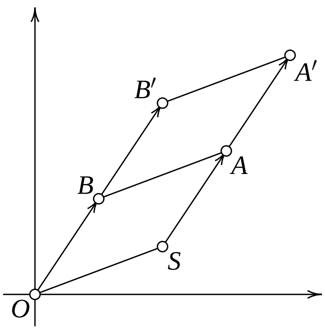
Transformacije sličnosti. Kao što su u geometriji važna preslikavanja koja ne menjaju rastojanja tačaka, tako su važna i ona koja ih menjaju na pravilan način. Preslikavanje f ravni na sebe je *transformacija sličnosti* ako je f bijekcija koja ima sledeću osobinu: postoji realan broj $k > 0$ takav da za svake dve različite tačke A i B važi $[f(A)\, f(B)] \cong k \cdot [AB]$. Broj k se zove *koeficijent sličnosti* transformacije f.

Naravno, svaka transformacija podudarnosti je transformacija sličnosti. Obrnuto, lako se vidi da je transformacija sličnosti sa koeficijentom 1 upravo transformacija podudarnosti. Vezu transformacija sličnosti sa transformacijama podudarnosti nam daje Teorema o reprezentaciji transformacija sličnosti u ravni: *Svaka transformacija sličnosti u ravni može da se predstavi kao kompozicija jedne transformacije podudarnosti i jedne homotetije.*

Homotetija. *Homotetija sa centrom S i koeficijentom $\alpha \neq 0$*, u oznaci h_S^α, je preslikavanje ravni na sebe sa sledećom osobinom: ako je $h_S^\alpha(A) = A'$, onda je $\overrightarrow{SA'} = \alpha \cdot \overrightarrow{SA}$.

Primetimo da je h_S^1 identičko preslikavanje, kao i da je $h_S^{-1} = \sigma_S$.

Homotetijom se neka duž preslikava na njoj paralelnu, $|\alpha|$ puta veću duž. Odatle homotetija nije transformacija podudarnosti, ali i dalje ima mnoge lepe osobine: ona preslikava pravu na njoj paralelnu pravu, ugao na podudaran ugao, a trougao na njemu sličan trougao.



Homotetija sa centrom u koordinatnom početku i koeficijentom α ima veoma jednostavan analitički oblik. Ako su A i A' tačke sa koordinatama (x,y) i (x',y'), redom, i ako je $h_O^\alpha(A) = A'$, onda je

$$\begin{aligned} x' &= \alpha \cdot x \\ y' &= \alpha \cdot y. \end{aligned}$$

Homotetija sa centrom u tački koja nije koordinatni početak se na uobičajeni način može predstaviti kao proizvod dve translacije i homotetije sa centrom u koordinatnom početku: $h_S^\alpha = \tau_{\overrightarrow{OS}} \circ h_O^\alpha \circ \tau_{\overrightarrow{SO}}$. Odatle dobijamo da homotetija sa centrom $S(p,q)$ i koeficijentom α ima sledeći analitički oblik:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha \cdot (x - p) + p \\ y' &= \alpha \cdot (y - q) + q. \end{aligned}$$

2.8 Implementacija: Point2D, Line2D i Polygon2D

Klasa Point2D implementira tačku, odnosno, vezani vektor u ravni. Tačku, odnosno vezani vektor, u ravni opisujemo njenim koordinatama – parom realnih brojeva:

```
public class Point2D {
 public double x, y;

 public Point2D(double x, double y) { this.x = x; this.y = y; }
 public Point2D(Point2D A) { this.x = A.x; this.y = A.y; }
```

Metod Q.length() računa dužinu vektora $\overrightarrow{OQ}$, metod Q.dist(P) računa rastojanje tačaka P i Q, dok metod Q.normalize() normalizuje vektor $\overrightarrow{OQ}$ tako što ga podeli njegovom dužinom i svede na jedinični vektor istog pravca i smera. Da se podsetimo, klasa MyMath sadrži niz jednostavnih pomoćnih metoda. Na primer, MyMath.sqr(x) računa x^2.

```
 public double length() { return Math.sqrt(MyMath.sqr(x) + MyMath.sqr(y)); }

 public double dist(Point2D P) {
  return Math.sqrt(MyMath.sqr(x - P.x) + MyMath.sqr(y - P.y));
 }

 public void normalize() {
  double L = length();
  if(L == 0.0) {
   System.out.println("Point2D: normalize: length == 0.0");
   System.exit(0);
  }
  x /= L; y /= L;
 }
```

Metod Q.minus(P) određuje vektor $\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$, što je vezani vektor koji je jednak vektoru $\overrightarrow{PQ}$. Metod Q.dot(P) računa skalarni proizvod vektora $\overrightarrow{OP}$ i $\overrightarrow{OQ}$. Metod Q.midpoint(P) određuje središte duži $[PQ]$, dok metod collinear(P, Q, R) utvrđuje da li su tačke P, Q i R kolinearne.

Metod MyMath.approxEqual(x, y) utvrđuje da li su dva broja približno jednaki. Naime, prilikom računanja sa realnim brojevima se akumulira greška i tada se često dešava da dva izraza koji bi trebalo da budu jednaki zapravo nisu jednaki jer se, usled akumulirane greške u računu, razlikuju na desetoj decimali. Zato metod MyMath.approxEqual(x, y) proverava da li je $|x-y| < 10^{-8}$.

```
 public Point2D minus(Point2D P) {
  return new Point2D(x - P.x, y - P.y);
 }
```

```
public double dot(Point2D P) { return x * P.x + y * P.y; }

public Point2D midpoint(Point2D P) {
  return new Point2D((x + P.x) / 2.0, (y + P.y) / 2.0);
}

public static boolean collinear(Point2D P, Point2D Q, Point2D R) {
  Point2D A = Q.minus(P);
  Point2D B = R.minus(P);
  return MyMath.approxEqual(Math.abs(A.dot(B)), A.length() * B.length());
}
```

Sledi niz metoda koji implementiraju transformacije u ravni. Metod Q.translate(P) translira tačku Q za vektor $\overrightarrow{OP}$. Metod Q.reflect(P) preslikava tačku Q centralnom simetrijom sa centrom P. Metod Q.mirror(L) preslikava tačku Q osnom simetrijom sa osom L (videti opis klase Line2D koji sledi). Metod Q.rot(P, phi) rotira tačku Q oko tačke P za ugao phi. Metod Q.scale(P, coeff) preslikava tačku Q homotetijom sa centrom P i koeficijentom coeff. Konačno, metod P.apply(T) na tačku P primenjuje afinu transformaciju T.

```
public void translate(Point2D P) { x += P.x; y += P.y; }

public void reflect(Point2D P) {
  x = 2.0 * P.x - x; y = 2.0 * P.y - y;
}

public void mirror(Line2D L) {
  double x0 = L.A.x; double y0 = L.A.y;
  double x1 = L.B.x; double y1 = L.B.y;
  double dx = x1 - x0;
  double dy = y1 - y0;
  double a = (dx*dx - dy*dy)/(dx*dx + dy*dy);
  double b = 2.0*dx*dy/(dx*dx + dy*dy);
  double x2 = a*(x - x0) + b*(y - y0) + x0;
  double y2 = b*(x - x0) - a*(y - y0) + y0;
  x = x2; y = y2;
}

public void rot(Point2D P, double phi) {
  double x2 = Math.cos(phi)*(x - P.x) - Math.sin(phi)*(y - P.y) + P.x;
  double y2 = Math.sin(phi)*(x - P.x) + Math.cos(phi)*(y - P.y) + P.y;
  x = x2; y = y2;
}

public void scale(Point2D P, double coeff) {
  x = coeff*(x - P.x) + P.x;
  y = coeff*(y - P.y) + P.y;
}
```

```
  public void apply(Affine2D T) {
    double x2 = T.a00*x + T.a01*y + T.b0;
    double y2 = T.a10*x + T.a11*y + T.b1;
    x = x2;  y = y2;
  }
}
```

Klasa Line2D opisuje pravu ili duž u ravni, u zavisnosti od konteksta. I jedan i drugi objekt su opisani dvema tačkama A i B: u slučaju da instancu ove klase shvatamo kao opis prave, radi se o pravoj AB, a u slučaju da je shvatamo kao opis duži, radi se o duži $[AB]$.

```
public class Line2D {
  public Point2D A, B;

  public Line2D(Point2D A, Point2D B) { this.A = A; this.B = B; }
```

Metod M.normalVector() vraća normalni vektor prave, dok metod M.orthogonal(L) utvrđuje da li su prave M i L ortogonalne.

```
  public Point2D normalVector() {
    return new Point2D(-(B.y - A.y), B.x - A.x);
  }

  public boolean orthogonal(Line2D L) {
    return MyMath.approxEqual(normalVector().dot(L.normalVector()), 0.0);
  }
```

Metod L.dist(P) određuje rastojanje tačke P od prave L. Metod L.leftOrRight(P) utvrđuje da li je tačka P u levoj ili desnoj poluravni s obzirom na pravu L. Metod vraća 0 ako tačka P pripada pravoj L, 1 ako je tačka P desno od prave L, odnosno, -1 ako je tačka P levo od prave L.

```
  public double dist(Point2D P) {
    return Math.abs((B.y - A.y)*P.x - (B.x - A.x)*P.y + A.y*B.x - A.x*B.y);
  }

  public int leftOrRight(Point2D P) {
    double lambda = (B.y - A.y)*P.x - (B.x - A.x)*P.y + A.y*B.x - A.x*B.y;
    if(lambda > 0.0) return 1;
    else if(lambda < 0.0) return -1;
    else return 0;
  }
```

Metod L.lineContains(P) utvrđuje da li tačka P pripada pravoj L, dok metod L.segmentContains(P) utvrđuje da li tačka P pripada duži L (čije krajnje tačke su $L.A$ i $L.B$).

```
public boolean lineContains(Point2D P) {
  if(A.x == B.x) return A.x == P.x;
  else if (A.y == B.y) return A.y == P.y;
  else {
    double s = (P.x - A.x)/(B.x - A.x);
    double t = (P.y - A.y)/(B.y - A.y);
    return MyMath.approxEqual(s, t);
  }
}

public boolean segmentContains(Point2D P) {
  if(A.x == B.x){
    if(A.x != P.x) return false;
    return A.y <= P.y && P.y <= B.y || B.y <= P.y && P.y <= A.y;
  } else if (A.y == B.y) {
    if(A.y != P.y) return false;
    return A.x <= P.x && P.x <= B.x || B.x <= P.x && P.x <= A.x;
  } else {
    double s = (P.x - A.x)/(B.x - A.x);
    double t = (P.y - A.y)/(B.y - A.y);
    if(!MyMath.approxEqual(s, t)) return false;
    return 0.0 <= s && s <= 1.0;
  }
}
```

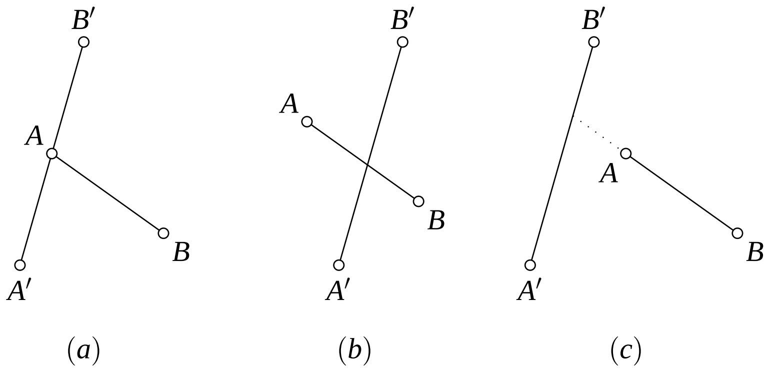
Metod M.linesIntersect(L) utvrđuje da li prave M i L imaju tačno jednu zajedničku tačku, dok metod M.segmentsIntersect(L) utvrđuje da li duži M i L imaju tačno jednu zajedničku tačku.

```
public boolean linesIntersect(Line2D L) {
  Point2D P = B.minus(A);
  Point2D Q = L.B.minus(L.A);
  return !Point2D.collinear(P, Q, new Point2D(0.0,0.0));
}

public boolean segmentsIntersect(Line2D L) {
  int LRA1 = leftOrRight(L.A);
  int LRB1 = leftOrRight(L.B);
  int LRA2 = L.leftOrRight(A);
  int LRB2 = L.leftOrRight(B);
  if(LRA1 == 0 || LRB1 == 0 || LRA2 == 0 || LRB2 == 0)
    return segmentContains(L.A) || segmentContains(L.B) ||
        L.segmentContains(A) || L.segmentContains(B);
  else
    return LRA1 == -LRB1 && LRA2 == -LRB2;
}
```

Naime, prave AB i $A'B'$ imaju tačno jednu zajedničku tačku ako i samo ako vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{A'B'}$ nisu kolinearni. Prilikom provere da li se dve duži seku koristime sledeću ideju: dve duži se seku ako i samo ako

- jedna od duži sadrži krajnju tačku one druge, ili
- krajnje tačke prve duži su sa različitih strana druge duži, i obrnuto.

Na sledećoj slici



u situaciji (a) duži koje se seku jer krajnja tačka jedne duži pripada drugoj, u situaciji (b) duži se seku jer su λ_A i λ_B različitog znaka, i $\lambda_{A'}$ i $\lambda_{B'}$ su različitog znaka, a u situaciji (c) duži se ne seku jer su λ_A i λ_B istog znaka.

Metod M.intersection(L) racuna tačku preseka pravih L i M, pretpostavljajući pri tome da prave L i M imaju tačno jednu tačku preseka. Metod se oslanja na parametarski oblik jednačine prave.

```
public Point2D intersection(Line2D L) {
  double dx = B.x - A.x;
  double dy = B.y - A.y;
  double Ldx = L.B.x - L.A.x;
  double Ldy = L.B.y - L.A.y;
  double t = (Ldy*(L.A.x - A.x) - Ldx*(L.A.y - A.y)) / (Ldy*dx - Ldx*dy);
  return new Point2D(A.x + t*dx, A.y + t*dy);
}
```

Metod L.segmentBisector() odred̄uje simetralu duži L, dok metod angleBisector(O, A, B) odred̄uje simetralu ugla $\angle OAB$.

```
public Line2D segmentBisector() {
  Point2D S = A.midpoint(B);
  Point2D T = new Point2D(S);
  T.translate(normalVector());
  return new Line2D(S, T);
}

public static Line2D angleBisector(Point2D O, Point2D A, Point2D B) {
  Point2D A1 = A.minus(O); A1.normalize();
  Point2D B1 = B.minus(O); B1.normalize();
  A1.translate(B1);
  Point2D S = new Point2D(O);
  S.translate(A1);
  return new Line2D(O, S);
}
```

Na kraju implementiramo osnovne transformacije u ravni. Transformacija se na pravu primenjuje tako što se odgovarajuća transformacija primeni na tačke koje određuju pravu.

```
  public void translate(Point2D P) {
    A.translate(P); B.translate(P);
  }

  public void reflect(Point2D P) {
    A.reflect(P); B.reflect(P);
  }

  public void mirror(Line2D L) {
    A.mirror(L); B.mirror(L);
  }

  public void rot(Point2D P, double phi) {
    A.rot(P, phi); B.rot(P, phi);
  }

  public void scale(Point2D P, double coeff) {
    A.scale(P, coeff); B.scale(P, coeff);
  }

  public void apply(Affine2D T) {
    A.apply(T); B.apply(T);
  }
}
```

Pogledajmo za kraj jedan jednostavan primer. Za trougao $\triangle ABC$ određujemo dve težišne duži, potom težište kao tačku preseka te dve duži, i onda proveravamo da li tako dobijena tačka pripada i trećoj težišnoj duži.

```
public class TezisteTrougla {
  public static void main(String[] args) {
    // trougao
    Point2D A = new Point2D(1.0,1.0);
    Point2D B = new Point2D(3.0,1.0);
    Point2D C = new Point2D(1.0,3.0);

    // sredista stranica
    Point2D A1 = B.midpoint(C);
    Point2D B1 = A.midpoint(C);
    Point2D C1 = A.midpoint(B);

    // tezisne duzi
    Line2D tA = new Line2D(A, A1);
    Line2D tB = new Line2D(B, B1);
    Line2D tC = new Line2D(C, C1);
```

```
    // teziste
    Point2D T = tA.intersection(tB);

    System.out.println("T = (" + T.x + ", " + T.y + ")");
    System.out.println(tC.segmentContains(T));
  }
}
```

Klasa Polygon2D implementira podršku za ravanske poligone. Polje N sadrži broj temena poligona, niz A sadrži temena poligona, a niz E sadrži strane poligona. Spisak ivica poligona će umnogome olakšati proveru da li je poligon prost i da li neka tačka pripada poligonalnoj liniji.

```
public class Polygon2D {
  public int N;
  public Point2D A[];
  public Line2D E[];

  public Polygon2D(double xp[], double yp[]) {
    if(xp.length != yp.length || xp.length < 3)
      System.out.println("Polygon2D: Invalid init params");
    else {
      N = xp.length;
      A = new Point2D[N];
      E = new Line2D[N];
      for(int i = 0; i < N; i++) A[i] = new Point2D(xp[i], yp[i]);
      for(int i = 0; i < N; i++) E[i] = new Line2D(A[i], A[(i + 1) % N]);
    }
  }
```

Metod S.isDegenerate() proverava da li je poligon S degenerisan u smislu da mu sva temena pripadaju istoj pravoj, dok metod S.lineContains(P) proverava da li tačka P pripada poligonalnoj liniji S.

```
  public boolean isDegenerate() {
    if(N <= 2) return true;
    Line2D L = new Line2D(A[0], A[1]);
    for(int i = 2; i < N; i++)
      if(L.leftOrRight(A[i]) != 0) return false;
    return true;
  }

  public boolean lineContains(Point2D P) {
    for(int i = 0; i < N; i++) {
      if(E[i].segmentContains(P)) return true;
    }
    return false;
  }
```

Metod isSimple proverava da li je poligon prost. On proverava da li postoje strane poligona koje se seku, i da li postoji teme poligona koje pripada strani poligona kojoj nije susedno.

```
public boolean isSimple() {
  for(int i = 0; i <= N - 3; i++) {
    for(int j = i + 2; j <= (i == 0 ? N - 2 : N - 1); j++) {
      if(E[i].segmentsIntersect(E[j]))
        return false;
    }
  }
  for(int i = 0; i <= N - 1; i++) {
    for(int j = 0; j <= N - 1; j++) {
      if(i != j && (i + 1) % N != j && E[i].segmentContains(A[j]))
        return false;
    }
  }
  return true;
}
```

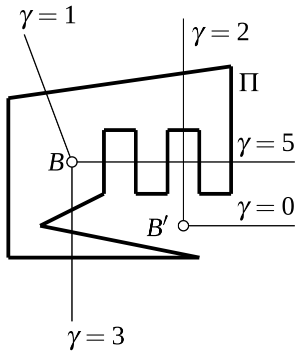
Metod S.signedArea() računa označenu površinu poligona *S*.

```
public double signedArea() {
  Point2D last = A[N - 1];
  double s = 0.0;
  for(int i = 0; i < N; i++) {
    s += last.x * A[i].y - A[i].x * last.y;
    last = A[i];
  }
  return 0.5 * s;
}
```

Transformacije se primenjuju na poligon tako što se odgovarajuća transformacija primeni na svako teme poligona.

```
public void translate(Point2D P) {
  for(int i = 0; i < N; i++) A[i].translate(P);
}

public void reflect(Point2D P) {
  for(int i = 0; i < N; i++) A[i].reflect(P);
}

public void mirror(Line2D L) {
  for(int i = 0; i < N; i++) A[i].mirror(L);
}

public void rot(Point2D P, double phi) {
  for(int i = 0; i < N; i++) A[i].rot(P, phi);
}

public void scale(Point2D P, double coeff) {
  for(int i = 0; i < N; i++) A[i].scale(P, coeff);
}
```

```
public void apply(Affine2D T) {
  for(int i = 0; i < N; i++) A[i].apply(T);
}
```



Ispitati da li data tačka pripada unutrašnjosti poligona predstavlja klasičan problem računarske geometrije. Da bismo mogli da pokažemo odgovarajuće algoritme moramo prvo okarakterisati ove unutrašnjosti i spoljašnjosti poligona nezavisno od intuicije.

Neka je Π prost poligon, neka je B tačka koja ne leži na poligonalnoj liniji i neka je p poluprava koja ishodi iz B i ne sadrži nijedno teme poligona. Poluprava p ima konačno mnogo presečnih tačaka sa poligonom Π i taj broj označavamo sa $\gamma_\Pi(p)$. Kada fiksiramo tačku B i posmatramo razne poluprave koje iz nje ishode i ne sadrže nijedno teme poligona, broj presečnih tačaka sa poligonom varira. Međutim, svi ti brojevi su iste parnosti, kako pokazuje sledeći stav.

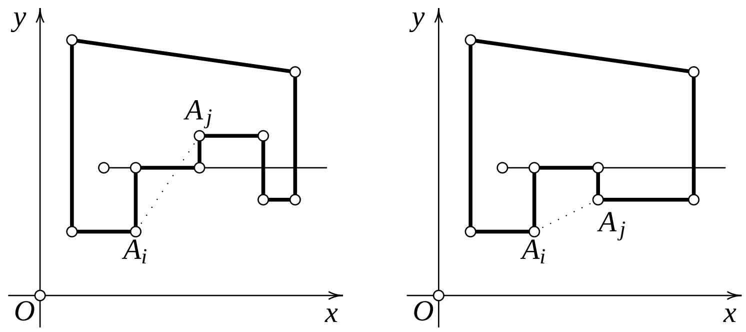
Stav 36. *Neka je Π prost poligon, B tačka koja ne leži na Π i neka su p, q poluprave koje ishode iz B i ne sadrže nijedno teme poligona. Tada su brojevi $\gamma_\Pi(p)$ i $\gamma_\Pi(q)$ iste parnosti.* ■

Time je opravdana sledeća definicija. Neka je Π poligon i $B \notin \Pi$ tačka u njegovoj ravni koja mu ne pripada. Kažemo da je tačka B *unutrašnja tačka poligona* Π ako postoji poluprava p koja ishodi iz B, ne sadrži nijedno teme poligona i $\gamma_\Pi(p)$ je neparan broj. Tačka B je *spoljašnja tačka poligona* Π ako postoji poluprava p koja ishodi iz B, ne sadrži nijedno teme poligona i $\gamma_\Pi(p)$ je paran broj. Skup svih unutrašnjih tačaka poligona Π se zove *unutrašnjost* i označava sa $\operatorname{int}\Pi$, a skup svih spoljašnjih tačaka se zove *spoljašnjost* poligona Π i označava sa $\operatorname{ext}\Pi$.

Definicija unutrašnjosti poligona sugeriše ovakav algoritam:

```
odredi polupravu p koja ishodi iz P i ne sadrži nijedno teme poligona;
boolean inside = true;
for(int v0 = N - 1, v1 = 0; v1 < N; v0 = v1, v1++) {
  if(poluprava p seče stranu poligona određenu temenima v0 i v1)
    inside = !inside;
return inside;
```

Problem sa ovim algoritmom je u tome što je potrebno dosta računanja sa realnim brojevima da bi se odredila poluprava koja zadovoljava navedene uslove. Zato ćemo sada prikazati nešto komplikovaniji, ali znatno efikasniji algoritam. Ideja algoritma je ista: uočićemo jednu specijalnu polupravu (*test-polupravu*) koja ishodi iz date tačke i brojaćemo preseke sa stranama poligona. U ovom slučaju odabraćemo test-polupravu tako da bude paralelna sa x-osom i da bude orijentisana u pozitivnom smeru x-ose. Ako test-poluprava ne prolazi ni kroz jedno teme poligona, dovoljno je prebrojati preseke i utvrditi parnost dobijenog broja. Ukoliko test-poluprava sadrži neko teme poligona, mogu da nastanu razni problemi:



Može da se desi da neko teme, pa čak i cela strana poligona leže na uočenoj polupravoj. U tom slučaju početna ideja se ne može implementirati direktno, već je neophodna mala modifikacija. Neka je A_i poslednje teme na koje smo naišli obilazeći poligon koje ne leži na polupravoj, a A_j prvo sledeće teme koje ne leži na polupravoj. Ukoliko su A_i i A_j sa raznih strana poluprave registrujemo presek, a ako su sa iste strane poluprave ponašamo se kao da preseka nije ni bilo.

Metod testRayContains(P, L) proverava da li tačka P pripada test-polupravoj L, i to je pomoćni metod za metod S.intContains(P) koji proverava da li tačka P pripada unutrašnjosti poligona S. Metod S.intContains(P) pretpostavlja da poligon S nije degenerisan i da tačka P ne lezi na poligonalnoj liniji.

```
  private static boolean testRayContains(Point2D P, Line2D L) {
    return P.y == L.A.y && P.x >= L.A.x;
  }

  public boolean intContains(Point2D P) {
    Point2D Q = new Point2D(P.x + 1, P.y);
    Line2D testRay = new Line2D(P, Q);
    int u0 = 0;
    while(testRayContains(A[u0], testRay)) u0++;
    int i = u0; int j = (u0 + 1) % N;
    boolean inside = false;
    do {
      while(testRayContains(A[j], testRay)) j = (j + 1) % N;
      Line2D L = new Line2D(A[i], A[j]);
      if(testRay.linesIntersect(L)) {
        Point2D X = testRay.intersection(L);
        if(testRayContains(X, testRay) && L.segmentContains(X)) inside = !inside;
      }
      i = j; j = (j + 1) % N;
    } while(i != u0);
    return inside;
  }
}
```

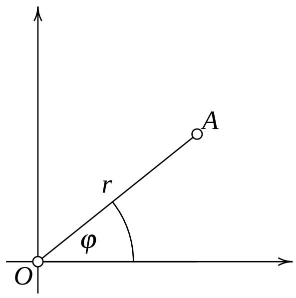
2.9 Zadaci

1. Date su tačke $A(3,2)$ i $S(-1,9)$. Naći tačku B tako da S bude središte duži $[AB]$.
2. Date su tačke $A(3,2)$, $B(4,11)$ i $T(-1,9)$. Naći tačku C tako da T bude težište trougla ABC.
3. Date su tačke $A(1,3)$, $B(11,2)$ i $S(7,4)$. Naći tačke C i D tako da $ABCD$ bude paralelogram čije dijagonale se seku u S.
4. Date su tačke $A(2,2)$, $B(9,3)$ i $C(5,6)$. Naći površinu trougla ABC

   (a) Heronovim obrascem. (Uputstvo: prema Heronovom obrascu, površina trougla je data sa $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gde su a, b, c dužine stranica trougla, a $s = (a+b+c)/2$.)

   (b) Primenom formule $P = |D|$ gde je
$$D = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$
5. Izračunati površinu trougla ABC gde je $A(a, b+c)$, $B(b, c+a)$ i $C(c, a+b)$.
6. Date su tačke $A(3,2)$, $B(1,4)$ i $T(2,6)$. Dokazati da se sve duži $[CD]$, gde su tačke C i D takve da je T težište četvorougla $ABCD$, seku u jednoj tački. (Uputstvo: dokazati da sve te duži imaju zajedničko središte.)
7. Za svaka dva vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$ je $\vec{v} \cdot \vec{w} \leqslant |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$. Jednakost važi ako i samo ako su vektori kolinearni. Dokazati.
8. Za svaka dva vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$ je $|\vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{\vec{v}^2 + 2 \cdot \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w}^2}$. Dokazati. (Uputstvo: koristiti da je $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.)
9. Neka su $\vec{v}$ i $\vec{w}$ vektori. Dokazati: $(\vec{v} + \vec{w})^2 + (\vec{v} - \vec{w})^2 = 2(|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2)$ i $(\vec{v} + \vec{w})^2 - (\vec{v} - \vec{w})^2 = 4 \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}$, gde je $\vec{u}^2$ kraći zapis za $\vec{u} \cdot \vec{u}$.
10. Naći ugao između dijagonala četvorougla $ABCD$, gde je $A(2,1)$, $B(6,0)$, $C(7,8)$, $D(-1,6)$.
11. Odrediti uglove trougla ABC, gde je $A(2,-6)$, $B(1,7)$, $C(-3,-1)$.
12. Odrediti ugao između vektora $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ i $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, gde su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori koji zaklapaju ugao $\frac{2\pi}{3}$.
13. Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ vektori. Dokazati da je $\vec{a} \perp \vec{c}$ ako i samo ako je $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$.
14. Izračunati $(\vec{a} + \vec{b})^2$ ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jedinični vektori koji zaklapaju ugao $\frac{\pi}{6}$.
15. Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jedinični vektori takvi da je $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Izračunati $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.
16. Odrediti ugao između jediničnih vektora $\vec{u}$ i $\vec{v}$, ako se zna da je $\vec{u} + 2\vec{v} \perp 5\vec{u} - 4\vec{v}$.
17. Za ne-nula vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ znamo da je $\vec{a} + 3\vec{b} \perp 7\vec{a} - 5\vec{b}$ i $\vec{a} - 4\vec{b} \perp 7\vec{a} - 2\vec{b}$. Dokazati da je $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ i potom odrediti ugao koga zaklapaju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

18. Odrediti jedinični vektor koji sa vektorom $\overrightarrow{v} = (4,2)$ zaklapa ugao $\pi/3$.
19. Opisati prave čiji koeficijent pravca je: (a) -1; (b) 1; (c) 0.
20. Odrediti ostala dva oblika jednačine date prave: (a) $3x-2y+6=0$; (b) $y=\frac{1}{3}x+6$; (c) $x=3$; (d) $x=1-3t, y=2t+1$.
21. Tačke $O(0,0), A(6,8), B(6,4), C(3,0), D(2,2), E(-2,-8), F(2,-2), G(0,5), H(4,2)$, razvrstati u dve grupe prema tome sa koje strane prave $3x-2y-6=0$ se nalaze.
22. Tačke $P(1,1)$, $Q(4,2)$ i $R(3,3)$ su središta stranica nekog trougla. Odrediti njegova temena.
23. Date su tačke $A(3,-2)$, $B(9,7)$, $C(5,5)$, $D(3,2)$. Dokazati da je $ABCD$ trapez i odrediti njegovu visinu.
24. Izračunati visine trougla ABC, gde je $A(3,-2)$, $B(9,7)$, $C(12,-1)$.
25. Data je prava $l: y=2x-5$ i tačka $A(-3,0)$. Naći pravu p koja sadrži tačku A, a sa pravom l zaklapa ugao $\pi/4$. (Pažnja: zadatak ima dva rešenja.)
26. U trouglu ABC, gde je $A(3,2)$, $B(9,4)$, $C(6,8)$ odrediti:
   (a) značajne tačke (težište, ortocentar, centar opisane kružnice i centar upisane kružnice);
   (b) poluprečnik opisane kružnice i poluprečnik upisane kružnice;
   (c) jednačinu Ojlerove prave (prava koja sadrži centar opisane kružnice i težište). Da li ortocentar pripada Ojlerovoj pravoj?
27. Data je prava $l: x-2y+4=0$ i tačke $A(1,4)$ i $B(4,6)$. Naći tačku $C \in l$ takvu da trougao ABC bude jednakokraki sa osnovicom $[AB]$.
28. Date su tačka $A(1,1)$ i prava $s: x+y=4$. Odrediti tačke B i C tako da trougao ABC bude jednakostranični i da mu visina iz C leži na pravoj s.
29. Dati su prava $l: x+y=4$ i tačka $T(5,3)$. Naći koordinate temena jednakostraničnog trougla čiji centar je T, čija jedna stranica je paralelna sa l i čiji obim je 15.
30. Date su tačke $A(1,1)$ i $S(4,5)$. Odrediti tačke B, C, D, E, F tako da $ABCDEF$ bude pravilan šestougao čiji centar je S.
31. *Polarne koordinate* predstavljaju drugi način predstavljanja tačaka u ravni. Svaka tačka u ravni je jednoznačno određena svojim vektorom položaja. Ako je r dužina vektora položaja tačke A, a φ ugao koga on zaklapa sa pozitivnim smerom x-ose, onda za uređeni par (r,φ) kažemo da predstavlja *polarne koordinate* tačke A.



   Preračun iz polarnih u pravougaone koordinate je jednostavan: ako tačka A ima pravougaone koordinate (x,y) onda je $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Preračun iz pravougaonih koordinata u polarne je nešto složeniji. Jasno je da je $r=\sqrt{x^2+y^2}$, dok je izračunavanje ugla φ nešto zahtevnije. Za kompaktan opis algoritma poslužićemo se funkcijom *signum* (lat. znak) koja se za realan broj x definiše ovako:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0. \end{cases}$$

   Sada računamo ovako.

   - Ako je $x=y=0$, onda se uzima da je $\varphi=0$.
   - Ako je $x=0$ i $y\neq 0$, onda je $\varphi=\operatorname{sgn} y\cdot\frac{\pi}{2}$.

- Ako je $x > 0$, onda je $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.
- Ako je $x < 0$ i $y = 0$, onda je $\varphi = -\pi$.
- Ako je $x < 0$ i $y \neq 0$, onda je $\varphi = \operatorname{sgn} y \cdot \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

(a) Odrediti polarne koordinate sledećih tačaka: $(3,0)$, $(1,1)$, $(0,6)$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

(b) Odrediti pravougaone koordinate tačaka čije polarne koordinate su: $(0,0)$, $(1, \frac{\pi}{4})$, $(3, \frac{2\pi}{3})$, $(1, -\pi)$, $(4, -\frac{3\pi}{4})$.

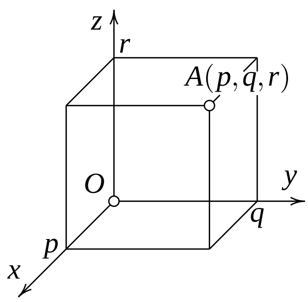
(c) Odrediti koordinate temena pravilnog petougla čiji centar je u koordinatnom početku i čije jedno teme je na x-osi, ako se zna da je poluprečnik opisane kružnice oko tog petougla jednak 3.

3 Analitička geometrija prostora

Ova glava je posvećena ključnim elementima analitičke geometrije u prostoru. Nakon što koordinatizujemo prostor i pokažemo kako se vektorima dodeljuju koordinate uvodimo osnovne operacije sa vektorima i odmah prelazimo na osnovni računski alat: skalarni, vektorski i mešoviti proizvod vektora u prostoru. U nastavku uvodimo parametarski oblik jednačine prave i normalni oblik jednačine ravni i diskutujemo uzajamne odnose tačaka, pravih i ravni u prostoru. Potom dajemo analitički oblik najvažnijih transformacija prostora (translacija, centralna simetrija, ravanska simetrija, homotetija i rotacija oko koordinatnih osa). Poglavlje koje sledi opisuje osnovne tehnike projektovanja, procesa kojim se prostor preslikava na ravan na „razuman način”, dok poglavlje nakon toga uvodi kvaternione koji nam omogućuju da na jednostavan način opišemo rotaciju oko proizvoljne prave u prostoru. Glavu završavamo operacionalizacijom uvedenih teorijskih koncepata u vidu klasa Quaternion, Point3D, Line3D i Plane3D koje implementiraju rad sa kvaternionima, tačkama, pravim i ravnima u prostoru.

3.1 Koordinate vektora u prostoru

Koordinatni sistem u prostoru je uređena petorka (O,E,x,y,z), gde su x, y i z po parovima ortogonalne orijentisane prave, O tačka u kojoj se sve tri seku, a E tačka prave x različita od O takva da je smer vektora $\overrightarrow{OE}$ jednak smeru prave x. Duž $[OE]$ se zove *jedinična duž*.



Kada je u prostoru fiksiran koordinatni sistem, svakoj tački prostora se jednoznačno može dodeliti uređena trojka realnih brojeva koje zovemo *koordinate tačke*. Kao i u ravni, ne pravimo razliku između tačke i njenih koordinata i često izraz „tačka čije su koordinate (p,q,r)” zamenjujemo (manje korektnim, ali pogodnijim) izrazom „tačka (p,q,r)”.

Rastojanje tačaka $A(x_1,y_1,z_1)$ i $B(x_2,y_2,z_2)$ se opisuje izrazom koji predstavlja jednostavno uopštenje odgovarajućeg izraza u ravni, a tako se i dokazuje:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Vektor u prostoru je uređeni par tačaka (A,B). Kao i u ravni, vektor (A,A)

zovemo *nula-vektor*; inače, za vektor kažemo da je *ne-nula*. Vektor (A,B) obeležavamo sa $\overrightarrow{AB}$, i uopšte sve što smo govorili o vektorima na samom početku se odnosi i na vektore u prostoru (operacije, osobine itd).

Vektore koji ishode iz O zovemo *vezani vektori*. Jasno je da za svaki vektor $\overrightarrow{AB}$ postoji tačka M takva da je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$, što znači da se pri radu sa vektorima možemo ograničiti samo na rad sa vezanim vektorima.

Koordinate vezanog vektora $\overrightarrow{OA}$ predstavljaju koordinate krajnje tačke, A, tog vektora. *Operacije sa vektorima* se vrše po koordinatama, kao u ravni. Neka su $\overrightarrow{v} = (x,y,z)$ i $\overrightarrow{w} = (x',y',z')$ vektori, a α realan broj. Tada je

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z'),\\
&\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = (x,y,z) - (x',y',z') = (x-x', y-y', z-z'),\\
&\alpha \cdot \overrightarrow{v} = \alpha \cdot (x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z),\\
&|\overrightarrow{v}| = d(O,(x,y,z)) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.
\end{aligned}$$

Kao i u ravni, za vektore $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ kažemo da su *kolinearni* ako postoji skalar α takav da je $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v}$ ili $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{u}$.

Koordinate slobodnog vektora se dobijaju njegovim „prebacivanjem u koordinatni početak”, tj. određivanjem (jedinstvenog) vezanog vektora koji mu je jednak. Tako, ako su $A(x_1,y_1,z_1)$ i $B(x_2,y_2,z_2)$ dve tačke, onda je

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1).$$

Primer. Odrediti koordinate vezanog vektora koji je jednak vektoru $\overrightarrow{AB}$, gde je $A(1,0,5)$ i $B(-3,2,3)$.

Rešenje. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-3,2,3) - (1,0,5) = (-4,2,-2)$. □

Neka su $\overrightarrow{u} = (x_1,y_1,z_1)$, $\overrightarrow{v} = (x_2,y_2,z_2)$ i $\overrightarrow{w} = (x_3,y_3,z_3)$ vektori u prostoru. Uređena trojka $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ se zove *triedar*. Neka je

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Triedar je *degenerisan* ako je $D = 0$. Za nedegenerisani triedar kažemo da je *desno orijentisan* ako je $D > 0$, a *levo orijentisan* ako je $D < 0$.

Koordinatni triedar je triedar $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ koga čine jedinični vektori $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ i $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$ koji leže na koordinatnim osama. Ime ovog triedra potiče odatle što svaki vektor može na jedinstven način da se predstavi pomoću vektora koordinatnog triedra ovako:

$$(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k},$$

Primetimo da je koordinatni triedar desno orijentisan.

3.2 Proizvod vektora u prostoru

Skalarni proizvod vektora $\overrightarrow{v} = (x,y,z)$ i $\overrightarrow{w} = (x',y',z')$, u oznaci $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$, je sledeći *broj*:

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w} = x\cdot x' + y\cdot y' + z\cdot z'.$$

Neka su $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ vektori i neka je α proizvoljan broj. Tada se lako pokazuje da skalarni proizvod vektora ima sledeće osobine:

- $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w} = \overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v}$;
- $\overrightarrow{v}\cdot(\alpha\overrightarrow{w}) = (\alpha\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w} = \alpha(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w})$;
- $\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$.

Teorema 37. *Neka je θ ugao koga zaklapaju ne-nula vektori $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$. Tada je $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w} = |\overrightarrow{v}|\cdot|\overrightarrow{w}|\cdot\cos\theta$.* ■

Posledica 38. *Ne-nula vektori $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ su normalni ako i samo ako je $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w} = 0$.* ■

Vektorski proizvod vektora $\overrightarrow{u} = (x_1,y_1,z_1)$ i $\overrightarrow{v} = (x_2,y_2,z_2)$ je vektor koji se označava sa $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$, a čije koordinate se određuju na sledeći način:

$$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Koristeći razvijanje determinante po elementima prve vrste, lako se vidi da se vektorski proizvod može zapisati i ovako:

$$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Geometrijska interpretacija vektorskog proizvoda dva vektora je data u sledećoj teoremi.

Stav 39. *Neka su $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ dva vektora i neka je $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$. Tada vektor $\overrightarrow{w}$ ima sledeće osobine:*

(i) $\overrightarrow{w}\perp\overrightarrow{u}$ *i* $\overrightarrow{w}\perp\overrightarrow{v}$;

(ii) $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|\cdot\sin\angle(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$;

(iii) *ako je $\overrightarrow{w}\neq\overrightarrow{0}$, onda je $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ desni triedar;*

(iv) *broj $|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|\cdot\sin\angle(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ predstavlja površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$.*

Dokaz. (i) Dokažimo da je $\overrightarrow{w}\perp\overrightarrow{u}$, tj. da je $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w} = 0$:

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w} = x_1\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + y_1\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + z_1\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

nakon množenja i sređivanja.

(ii) Ako je $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$, onda je $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$, što se lako proverava, i veza očigledno važi. Pretpostavimo zato da je $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ i $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$, i neka je θ ugao koga zaklapaju vektori $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$. Kao što znamo, $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|}$. Kako za uglove iz intervala $[0,\pi]$ važi $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$, dobijamo:

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|}\right)^2}=\frac{\sqrt{|\overrightarrow{u}|^2\cdot|\overrightarrow{v}|^2-(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})^2}}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|}.$$

Dokažimo sada da je $|\overrightarrow{u}|^2\cdot|\overrightarrow{v}|^2-(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})^2=|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|^2$:

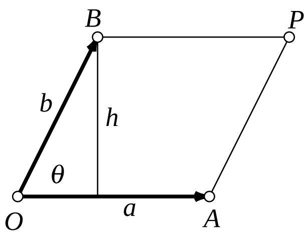
$$\begin{aligned}
&|\overrightarrow{u}|^2\cdot|\overrightarrow{v}|^2-(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})^2=\\
&\qquad=(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2\\
&\qquad=\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}^2\\
&\qquad=|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|^2.
\end{aligned}$$

Ovim smo pokazali da je $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|}$.

(iii) Neka je $\overrightarrow{w}\neq\overrightarrow{0}$. Tada je

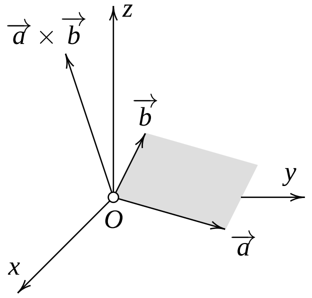
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ \begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}^2=|\overrightarrow{w}|^2.$$



Kako je $|\overrightarrow{w}|\neq 0$, gornja determinanta je pozitivna, čime je pokazano da tri navedena vektora obrazuju desni triedar.

(iv) Neka je A krajnja tačka vektora $\overrightarrow{u}$, B krajnja tačka vektora $\overrightarrow{v}$, a P tačka takva da je $OAPB$ paralelogram. Neka je $a:=|\overrightarrow{u}|$, $b:=|\overrightarrow{v}|$ i θ ugao koga zaklapaju vektori $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$. Neka je h visina paralelograma iz temena B na pravu OA. Tada je površina paralelograma data sa $p=ah$. Kako je $h=b\sin\theta$, dobijamo $p=ab\sin\theta$. ■



Dakle, vektorski proizvod dva vektora je novi vektor koji je normalan na oba (a time i na ravan koju polazna dva vektora određuju), sa njima obrazuje desni triedar, a dužina mu je jednaka površini paralelograma konstruisanog nad vektorima koji se množe.

Neka je $\mathscr{F}$ „jednostavna” ravanska figura površine p čiji rub je orijentisan. (Nećemo se upuštati u definiciju pojma „jednostavna ravanska figura”.) Vektor koji je normalan na ravan figure $\mathscr{F}$, čija dužina je p i čiji smer je odabran tako da se sa njegovog vrha rub figure $\mathscr{F}$ vidi kao pozitivno orijentisana kriva zove se *vektor površi figure* $\mathscr{F}$. U svetlu ove konvencije, vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ je vektor površi paralelograma konstruisanog nad $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Posledica 40. *Vektori $\vec{u}$ i $\vec{v}$ su kolinearni ako i samo ako je $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.*

Dokaz. Ako je bar jedan od vektora $\vec{u}$, $\vec{v}$ nula-vektor, on je kolinearan sa onim drugim vektorom, a jasno je da je $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Pretpostavimo, zato, da je $\vec{u} \neq \vec{0}$ i $\vec{v} \neq \vec{0}$, i neka je θ ugao koga oni zaklapaju. Ako su vektori $\vec{u}$ i $\vec{v}$ kolinearni, onda je $\theta = 0$ ili $\theta = \pi$. U oba slučaja je $\sin\theta = 0$, pa je $|\vec{u} \times \vec{v}| = 0$. Odatle je i $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Obrnuto, neka je $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$. Zbog $|\vec{u}| \neq 0$ i $|\vec{v}| \neq 0$, znamo da je $\sin\theta = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = 0$. Odatle je $\theta = 0$ ili $\theta = \pi$, pa su vektori $\vec{u}$ i $\vec{v}$ kolinearni. ■

Teorema 41. *Neka su $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ vektori i neka je α skalar. Tada se lako pokazuje da je*

- $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$*;*
- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$*;*
- $(\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \times \vec{v})$*;*
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$*;*
- $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$. ■

Mešoviti proizvod vektora $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ je *broj* $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ koga označavamo sa $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$. Ako je $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, iz razvoja determinante na desnoj strani jednakosti po elementima poslednje vrste lako se vidi da je tada

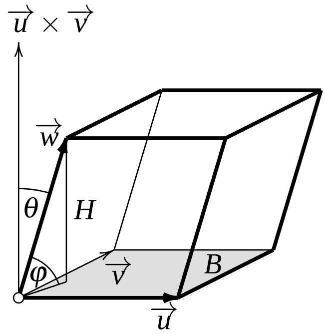
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Na osnovu definicije degenerisanog, levog i desnog triedra jasno je da važi sledeće:

- ako je $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$, triedar $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ je degenerisan;
- ako je $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] > 0$, triedar $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ je desno orijentisan;
- ako je $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] < 0$, triedar $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ je levo orijentisan.

Prema tome, znak mešovitog proizvoda nam daje informaciju o orijentaciji odgovarajućeg triedra. Kako pokazuje sledeća teorema, apsolutna vrednost mešovitog proizvoda tri vektora meri zapreminu paralelepipeda koji je razapet tim vektorima.

Teorema 42. *Neka su $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vektori i neka je $V = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$. Broj $|V|$ je jednak zapremini paralelepipeda konstruisanog nad vektorima $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ kao nad susednim ivicama.*



Dokaz. Neka je $V \neq 0$ i neka vektori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ obrazuju desni triedar. Tada je $V > 0$. Pokažimo da je broj V jednak zapremini V_P opisanog paralelepipeda. Kao što znamo iz elementarne geometrije, $V_P = B \cdot H$, gde je B površina paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{u}$ i $\vec{v}$ (*baza* paralelepipeda), a H je visina paralelepipeda povučena iz krajnje tačke vektora $\vec{w}$. Označimo sa φ ugao između vektora $\vec{w}$ i ravni određene vektorima $\vec{u}$ i $\vec{v}$, a sa θ ugao između vektora $\vec{u}\times\vec{v}$ i $\vec{w}$. Prema definiciji vektorskog proizvoda, $B = |\vec{u}\times\vec{v}|$, dok je $H = |\vec{w}|\sin\varphi$. Zbog $\varphi+\theta = \pi/2$ je $H = |\vec{w}|\cos\theta$. Tako je $V_P = B\cdot H = |\vec{u}\times\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = V$. ■

3.3 Prava

Neka je $\vec{v} = (a,b,c)$ ne-nula vektor, $A(p,q,r)$ tačka, a l prava paralelna vektoru $\vec{v}$ koja sadrži tačku A (ovim je prava l jednoznačno određena!). Za proizvoljnu tačku $B(x,y,z)$ prave l je $\overrightarrow{AB} \parallel l$, tj. $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{v}$. To znači da postoji realan broj t takav da je $\overrightarrow{AB} = t\vec{v}$, odnosno, $(x-p, y-q, z-r) = t(a,b,c)$. Kada ovo raspišemo po koordinatama, dobijamo *parametarski oblik jednačine prave u prostoru*:

$$\begin{aligned} x &= p + t\cdot a \\ y &= q + t\cdot b \quad , \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &= r + t\cdot c \end{aligned}$$

Kada parametar t ograničimo na neki podskup skupa $\mathbb{R}$, dobijamo parametarsku jednačinu odgovarajućeg podskupa prave. Tako, za $t \in [0,1]$ dobijamo parametarsku jednačinu duži $[AB]$, a za $t \in [0,+\infty)$ parametarsku jednačinu poluprave $[AB)$.

Primer. Ispitati koja od tačaka $A(4,-18,13)$, $B(1,-6,6)$, $C(-1/2,0,4)$, $D(-1,$ $3,\ 10)$ pripada pravoj $l : x = -1+t,\ y = 2-4t,\ z = 3+2t$.

Rešenje. Da bismo utvrdili da li tačka A pripada pravoj l, u jednačinu prave l umesto x, y, z uvrstimo koordinate tačke A. Tako dobijamo sistem tri jednačine sa jednom nepoznatom:

$$\begin{aligned} 4 &= -1+t \\ -18 &= 2-4t \\ 13 &= 3+2t. \end{aligned}$$

Iz prve jednačine dobijamo $t = 5$, iz druge $t = 5$ i iz treće $t = 5$. Kako smo u sva tri slučaja dobili istu vrednost, tačka A pripada pravoj l (i odgovara joj parametar 5). Pogledajmo sada tačku B. Odgovarajući sistem izgleda ovako:

$$\begin{aligned} 1 &= -1+t \\ -6 &= 2-4t \\ 6 &= 3+2t. \end{aligned}$$

Iz prve dve jednačine dobijamo $t = 2$, dok iz treće dobijamo $t = 3/2$. To znači da tačka B ne pripada pravoj l. Za tačke C i D rezonujemo analogno. □

Dve tačke jednoznačno određuju pravu, a do odgovarajuće jednačine se dolazi na sledeći način. Neka su $A(p_0, q_0, r_0)$ i $B(p_1, q_1, r_1)$ različite tačke. Parametarski oblik jednačine prave AB je dat sa

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}, \quad t \in \mathbb{R},$$

gde je $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$ vektor proizvoljne tačke prave AB. Kada ovo raspišemo po koordinatama dobijamo

$$\begin{array}{l} x = p_0 + t(p_1 - p_0) \\ y = q_0 + t(q_1 - q_0) \\ z = r_0 + t(r_1 - r_0) \end{array} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Prave u prostoru mogu biti u jednom od sledeća tri odnosa:

- mogu biti paralelne (ovde je uključena i mogućnost da se poklapaju),
- mogu se seći, i
- mogu biti mimoilazne.

Prave su paralelne ako i samo ako su njihovi vektori pravca kolinearni. Ako dve paralelne prave imaju zajedničku tačku, onda se poklapaju (pa, zapravo, imaju beskonačno mnogo zajedničkih tačaka). U suprotnom su različite i paralelne.

Ako prave nisu paralelne, da bismo utvrdili da li se seku ili su mimoilazne, potražimo njihov presek. Ukoliko presek ne postoji, prave su mimoilazne.

Ugao između dve prave je zapravo ugao između njihovih vektora pravca. Za dve prave kažemo da su normalne ako su njihovi vektori pravca normalni. Primetimo da se ova definicija odnosi i na prave koje su mimoilazne.

Primer. Ispitati odnos svake dve od sledeće tri prave:

$$a: \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = t \end{array} \qquad b: \begin{array}{l} x = 2t \\ y = 2t \\ z = 5 + 2t \end{array} \qquad c: \begin{array}{l} x = -10 + 3t \\ y = -7 + t \\ z = -8 + 2t \end{array}$$

Rešenje. Vektori pravca pravih a i b su, redom, $(1,1,1)$ i $(2,2,2)$. Kako su oni kolinearni, prave su paralelne. Ispitajmo još da li se prave a i b poklapaju. Uzmimo proizvoljnu tačku sa prave a, recimo, $(1,-2,0)$. Ona ne pripada pravoj b (zato što odgovarajući sistem jednačina koji se dobija kada koordinate ove tačke uvrstimo umesto x, y, z u jednačinu prave b nema rešenje po t), što znači da se prave a i b ne poklapaju.

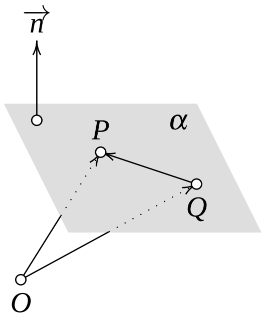
Prave a i c nisu paralelne zato što im vektori pravca nisu kolinearni. Dakle, one se ili seku ili su mimoilazne. Da bismo utvrdili o čemu se radi, potražimo njihov presek:

$$\begin{aligned} 1 + t &= -10 + 3s \\ -2 + t &= -7 + s \\ t &= -8 + 2s. \end{aligned}$$

(Napomena: kada tražimo presek dve prave, parametre tih pravih moramo označiti različitim slovima!) Ovaj sistem tri jednačine sa dve nepoznate ima rešenje $t = -2$, $s = 3$, na osnovu čega zaključujemo da se prave seku. Presečna tačka se dobija uvrštavanjem parametra u polaznu jednačinu (parametra t u jednačinu prave a, ili parametra s u jednačinu prave b, svejedno je) i tako se dobija tačka $(-1,-4,-2)$.

Prave b i c nisu paralelne, a odgovarajući sistem jednačina nema rešenje. To znači da su one mimoilazne. □

3.4 Ravan



Neka je $\overrightarrow{n} = (A,B,C)$ ne-nula vektor i $P(x_0,y_0,z_0)$ tačka u prostoru. Na ovaj način je jednoznačno određena ravan α koja sadrži P i normalna je na $\overrightarrow{n}$. Neka je $Q(x,y,z)$ proizvoljna tačka ravni α, a $\overrightarrow{r}$ njen vektor položaja. Tada je $\overrightarrow{PQ} \parallel \alpha$, pa je $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{n}$. To, dalje, znači da je $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$, odnosno,

$$\overrightarrow{n} \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{OP}) = 0.$$

Kada ovaj skalarni proizvod raspišemo, dobijamo

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

Nakon sređivanja, i uz oznaku $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ dobijamo *normalni oblik jednačine ravni:*

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Normalni oblik jednačine ravni je zgodan između ostalog i zato što se iz njega veoma jednostavno očitava vektor na koga je ravan normalna: to je (A,B,C). Ravan nema jedinstven normalni oblik jednačine. Međutim, svaki se može dobiti od svakog drugog množenjem ne-nula brojem. Na primer, $2x - y + 4z - 3 = 0$ i $-6x + 3y - 12z + 9 = 0$ predstavljaju jednačine iste ravni, zato što se druga dobija od prve množenjem sa -3.

Za jednačinu $Ax + By + Cz + D = 0$ kažemo da je *normalizovana* ako je normalni vektor (A,B,C) dužine 1. Svaka jednačina $Ax + By + Cz + D = 0$ se deljenjem sa $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ može svesti na normalizovani oblik.

Tri nekolinearne tačke jednoznačno određuju ravan. Način da se dođe do jednačine te ravni je dat u sledećoj teoremi.

Teorema 43. *Neka su $U(p_0,q_0,r_0)$, $V(p_1,q_1,r_1)$ i $W(p_2,q_2,r_2)$ tri nekolinearne tačke. Jednačina ravni koja je određena ovim tačkama je data sa*

$$\begin{vmatrix} x-p_0 & y-q_0 & z-r_0 \\ p_1-p_0 & q_1-q_0 & r_1-r_0 \\ p_2-p_0 & q_2-q_0 & r_2-r_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dokaz. Dokažimo da neka tačka pripada navedenoj ravni ako i samo ako njene koordinate zadovoljavaju gornju jednačinu.

($\Rightarrow$) Neka je $P(x,y,z)$ proizvoljna tačka ove ravni. Tada su vektori $\overrightarrow{UP}$, $\overrightarrow{UV}$ i $\overrightarrow{UW}$ koplanarni, na osnovu čega je $[\overrightarrow{UP},\overrightarrow{UV},\overrightarrow{UW}] = 0$. Zato važi jednakost navedena u formulaciji stava.

($\Leftarrow$) Obrnuto, neka tačka $P(x,y,z)$ ne pripada ravni određenoj tačkama U, V, W. Zato što poslednje tri tačke nisu kolinearne, vektori $\overrightarrow{UP}$, $\overrightarrow{UV}$ i $\overrightarrow{UW}$ nisu koplanarni. Odatle je $[\overrightarrow{UP},\overrightarrow{UV},\overrightarrow{UW}] \neq 0$. ■

Primer. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačke $A(1,2,1)$, $B(3,0,2)$ i $C(2,5,0)$.

Prvo rešenje. Na osnovu prethodnog stava, jednačina ravni se dobija direktno, sređivanjem sledeće determinante:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 3-1 & 0-2 & 2-1 \\ 2-1 & 5-2 & 0-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Tako, jednačina tražene ravni je $-(x-1)+3(y-2)+8(z-1) = 0$, odnosno, $-x+3y+8z-13 = 0$.

Drugo rešenje. Do jednačine ravni možemo doći koristeći osnovnu osobinu da je ravan jednoznačno određena vektorom na koga je normalna, kao i jednom tačkom koju sadrži. Tačaka imamo na pretek, pa da vidimo kako možemo odrediti normalni vektor. Tačke A, B, C leže u ravni što znači da su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ paralelni sa ravni. Odatle je $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ vektor koji je normalan na ravan. Kako je $\overrightarrow{AB} = (2,-2,1)$ i $\overrightarrow{AC} = (1,3,-1)$, koordinate normalnog vektora su

$$\overrightarrow{n} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1,3,8).$$

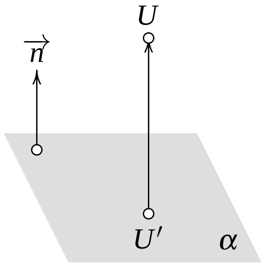
Vektor $\overrightarrow{n}$ i tačka A jednoznačno određuju ravan čija jednačina je $-(x-1)+3(y-2)+8(z-1) = 0$.

Primetimo da prvo rešenje nije ništa drugo do kompaktna verzija drugog. □

Neka je $Ax+By+Cz+D = 0$ jednačina neke ravni, neka je $U(p,q,r)$ neka tačka i $\lambda_U = Ap+Bq+Cr+D$. Kada tačka U pripada ravni, onda je $\lambda_U = 0$. U suprotnom, λ_U je broj na osnovu koga se može utvrditi rastojanje tačke U od ravni, kao i poluprostor s obzirom na tu ravan kojoj tačka pripada.

Stav 44. *Neka je $Ax+By+Cz+D = 0$ normalizovana jednačina ravni α (to znači da je $A^2+B^2+C^2 = 1$), neka je $U(p,q,r)$ neka tačka i $\lambda_U = Ap+Bq+Cr+D$. Tada je $|\lambda_U|$ jednako rastojanju tačke U od ravni α. Ako je $\lambda_U > 0$ onda se tačka U nalazi u onom poluprostoru s obzirom na ravan α na koga pokazuje normalni vektor ravni α; ako je $\lambda_U < 0$, tačka A se nalazi u drugom poluprostoru.*

Dokaz. Ako tačka U pripada ravni α, onda je $\lambda_U = 0$, a to i jeste rastojanje tačke U od ravni α. Pretpostavimo, zato, da tačka U ne pripada ravni α.



Neka je $\overrightarrow{n} = (A,B,C)$ normalni vektor ravni α. Prema pretpostavci je $|\overrightarrow{n}| = 1$. Označimo sa $U'(p',q',r')$ ortogonalnu projekciju tačke U na ravan α. Vektori $\overrightarrow{U'U}$ i $\overrightarrow{n}$ su paralelni (oba su normalni na ravan α), pa postoji broj μ takav da je $\overrightarrow{U'U} = \mu\overrightarrow{n}$. Zato što je $\overrightarrow{n}$ jedinični vektor, broj $|\mu|$ je jednak rastojanju tačke U od ravni α. Ako je $\mu > 0$, onda su vektori $\overrightarrow{U'U}$ i $\overrightarrow{n}$ istog smera, što znači da se tačka U nalazi u onom poluprostoru s obzirom na ravan α na koga pokazuje $\overrightarrow{n}$. Ako je $\mu < 0$, vektori su suprotnog smera, pa se tačka U nalazi u drugom poluprostoru. Pokazaćemo da je $\mu = \lambda_U$.

Iz $\overrightarrow{U'U} = \mu\overrightarrow{n}$ dobijamo da je $(p-p', q-q', r-r') = \mu(A,B,C)$, odakle je $p' = p-\mu A$, $q' = q-\mu B$ i $r' = r-\mu C$. Tačka U' pripada ravni α, pa zadovoljava njenu jednačinu. Odatle je $Ap'+Bq'+Cr'+D = 0$. Nakon uvrštavanja gornjih izraza za p' i q' dobijamo $Ap+Bq+Cr+D-\mu(A^2+B^2+C^2) = 0$. Kako je $A^2+B^2+C^2 = 1$, to je $\mu = Ap+Bq+Cr+D = \lambda_U$. ■

Posledica 45. *Neka je $Ax+By+Cz+D = 0$ jednačina ravni α i $U(p,q,r)$ neka tačka. Rastojanje tačke U od ravni α je dato sa:*

$$\left|\frac{Ap+Bq+Cr+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.$$

Dokaz. Tvrđenje sledi iz prethodnog stava jer je $\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$ normalizovana jednačina ravni α. ■

Ravan deli prostor na dva poluprostora. *Desnim* ćemo zvati onaj na koga pokazuje normalni vektor, a *levim* onaj drugi. Prema tome, za tačku $M(x_0,y_0,z_0)$ i ravan $\alpha : Ax+By+Cz+D = 0$ važi sledeće:

- ako je $\lambda_M = 0$, tačka M leži u ravni α;
- ako je $\lambda_M > 0$, tačka M leži u desnom poluprostoru;
- ako je $\lambda_M < 0$, tačka M leži u levom poluprostoru.

Dve ravni mogu biti paralelne (gde ubrajamo i slučaj kada se poklapaju), ili se mogu seći po pravoj. Ravni $\alpha : Ax+By+Cz+D = 0$ i $\beta : A'x+B'y+C'z+D' = 0$ su paralelne ako i samo ako su njihovi normalni vektori (A,B,C) i (A',B',C') kolinearni.

Neka su ravni α i β paralelne. Tada se normalni vektor jedne od njih može dobiti kao umnožak normalnog vektora one druge. Recimo, neka je $(A,B,C) = \mu(A',B',C')$. Ako je $D = \mu D'$, ravni se poklapaju. U suprotnom su paralelne, ali različite.

Ako ravni nisu paralelne, one se seku po pravoj čiju parametarsku jednačinu dobijamo rešavanjem odgovarajućeg sistema (koji se sastoji od dve jednačine sa tri nepoznate).

Ugao između dve ravni jednak je uglu između njihovih normalnih vektora. Ravni $\alpha : A_0x+B_0y+C_0z+D_0 = 0$ i $\beta : A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ su *ortogonalne* ako su njihovi normalni vektori ortogonalni, tj. ako i samo ako je

$$A_0A_1+B_0B_1+C_0C_1 = 0.$$

Primer. Odrediti odnos svake dve od sledeće tri ravni:

$$\begin{aligned}
&\alpha : 2x - y + 3z - 7 = 0,\\
&\beta : 4x - 2y + 6z + 3 = 0,\\
&\gamma : 4x - 3y + z - 3 = 0.
\end{aligned}$$

Rešenje. Normalni vektori ravni α i β su, redom, $\overrightarrow{n_\alpha} = (2,-1,3)$ i $\overrightarrow{n_\beta} = (4,-2,6)$. Kako je $\overrightarrow{n_\beta} = 2\overrightarrow{n_\alpha}$, ovde dve ravni su paralelne. Međutim, one se ne poklapaju.

Ravni α i γ nisu paralelne. Odredimo njihovu presečnu pravu. Posmatrajmo sistem

$$\begin{aligned}
2x - y + 3z - 7 &= 0,\\
4x - 3y + z - 3 &= 0.
\end{aligned}$$

Množenjem prve jednačine sa -2 i dodavanjem drugoj dobijamo

$$\begin{aligned}
2x - y + 3z - 7 &= 0,\\
-y - 5z + 11 &= 0.
\end{aligned}$$

U ovakvoj situaciji je jasno da sistem ima beskonačno mnogo rešenja. Ona se dobijaju tako što jednoj promenljivoj druge jednačine možemo da dodelimo proizvoljnu vrednost, čime je vrednost ostalih promenljivih jednoznačno određena. Uzmimo, zato da je $z = t$, gde je $t \in \mathbb{R}$ proizvoljna vrednost. Sada je $y = 11 - 5t$, a $x = 9 - 4t$. Tako smo dobili rešenje sistema u obliku

$$\begin{aligned}
x &= 9 - 4t\\
y &= 11 - 5t \quad , \qquad t \in \mathbb{R},\\
z &= t
\end{aligned}$$

što nije ništa drugo do jednačina prave koja nastaje presekom ravni α i γ. (Iz parametarskog oblika jednačine odmah vidimo da je presečna prava paralelna vektoru $(-4,-5,1)$ i da prolazi kroz tačku $(9,11,0)$.) Ravni β i γ se takođe seku i jednačina presečne prave se određuje na isti način. $\square$

Ukoliko prava ne leži u ravni, onda može sa ravni imati najviše jednu zajedničku tačku. Ako prava leži u ravni ili nemaju zajedničkih tačaka, kažemo da su prava i ravan paralelne. U suprotnom imaju tačno jednu zajedničku tačku. Rešavanjem sistema odgovarajućih jednačina se lako utvrđuje u kom odnosu se nalaze data prava i data ravan.

Primer. Odrediti u kom odnosu se nalaze data prava i data ravan:

$$\begin{array}{llllll}
a: & x = 1 + t & b: & x = 2t & c: & x = -10 + 3t\\
 & y = -2 + t & & y = 2t & & y = -7 + t\\
 & z = t & & z = 5 + 2t & & z = -8 + 2t\\
\alpha: & 2x - 4y + 7 = 0 & \beta: & 2x - y - z + 5 = 0 & \gamma: & x - y - z = 0.
\end{array}$$

Rešenje. Uvrštavanjem jednačine prave a u jednačinu ravni α dobijamo

$$2(1+t) - 4(-2+t) + 7 = 0$$

odakle je $t = 17/2$. Odgovarajući sistem ima jedinstveno rešenje, pa se prava i ravan seku. Parametar presečne tačke je $t = 17/2$, pa su njene koordinate $(19/2, 13/2, 17/2)$.

Uvrštavanjem jednačine prave b u jednačinu ravni β dobijamo trivijalnu jednakost $0 = 0$. To znači da sistem ima beskonačno mnogo rešenja, pa prava leži u ravni. Uvrštavanjem jednačine prave c u jednačinu ravni γ dobijamo kontradikciju $5 = 0$, što znači da prava c i ravan γ nemaju zajedničkih tačaka. Zato je $c \parallel \gamma$. $\square$

Dve prave koje se seku određuju tačno jednu ravan. Neka se prave l_1 i l_2 seku u tački S, neka je $\overrightarrow{p_1}$ vektor pravca prve, a $\overrightarrow{p_2}$ vektor pravca druge prave. Tada se ravan koju one određuju može dobiti na sledeći način: ravan sadrži tačku S i normalna je na vektor $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2}$.

Prava je normalna na ravan ako su vektor pravca prave i normalni vektor ravni kolinearni, što se lako proverava.

Neka je data ravan α. Za svaku tačku U postoji jedinstvena prava l koja sadrži tačku U i normalna je na ravan α. Presek prave l i ravni α je tačka U' koju zovemo *ortogonalna projekcija date tačke na datu ravan*.

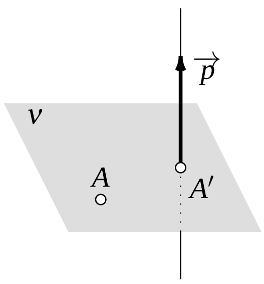
Primer. Odrediti tačku A' simetričnu tački $A(-2, 3, 5)$ u odnosu na ravan $\alpha : 2x + y - z + 3 = 0$.

Rešenje. Neka je l normala ravni α koja sadrži tačku A. Ona seče ravan α u tački S (i to je ortogonalna projekcija tačke A na ravan α). Po definiciji ravanske simetrije (videti str. 94), tačka S je središte duži $[AA']$. Jednačina prave l se dobija jednim pogledom: njen vektor pravca je upravo normalni vektor ravni α, a prolazi kroz tačku A. Tako dobijamo $l : x = -2 + 2t, y = 3 + t, z = 5 - t$. Tačka S je presek prave l i ravni α. Rešavanjem odgovarajućeg sistema po t dobija se $t = 1/2$, pa je $S(-1, 7/2, 9/2)$. Neka tačka A' ima koordinate (p, q, r). Zato što je S središte duži $[AA']$, mora biti

$$\frac{p-2}{2} = -1, \qquad \frac{q+3}{2} = \frac{7}{2}, \qquad \frac{r+5}{2} = \frac{9}{2},$$

pa je $p = 0$, $q = 4$ i $r = 4$. Tako smo dobili da tačka A' ima koordinate $(0, 4, 4)$. $\square$

Primer. Odrediti rastojanje tačke $A(1, 2, -1)$ od prave $l : x = 4 - t, y = 6, z = 2 + 3t$.



Rešenje. Ravan ν sadrži tačku $A(1, 2, -1)$ i normalna je na pravu l, pa je normalna i na vektor $\overrightarrow{p} = (-1, 0, 3)$, što je vektor pravca prave l. Zato je njena jednačina data sa $\nu : -(x-1) + 3(z+1) = 0$. Presek ravni ν i prave l je tačka A' čiji parametar na pravoj l je $t = -\frac{3}{5}$. Tako dobijamo da je $A' = (23/5, 6, 1/5)$. (Prema definiciji, tačka A' je ortogonalna projekcija tačke A na pravu l.) Rastojanje tačke A od prave l je jednako rastojanju tačaka A i A', a to je $\frac{2}{5}\sqrt{505}$. $\square$

3.5 Transformacije u prostoru

Preslikavanje f prostora na sebe je *transformacija podudarnosti* ako je f bijekcija koja ima sledeću osobinu: za svake dve različite tačke A i B je $[AB] \cong [f(A)\,f(B)]$. Struktura transformacija podudarnosti u prostoru je znatno složenija nego što je to slučaj u ravni, tako da ćemo ovde navesti samo nekoliko važnih primera.

Translacija. *Translacija za vektor* $\overrightarrow{v}$, u oznaci $T_{\vec{v}}$, je preslikavanje prostora na sebe sa sledećom osobinom: ako je $T_{\vec{v}}(A) = A'$, onda je $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{v}$. (Slovo T nije veliko latinično *te*, već veliko grčko *tau*, koje se piše na isti način).

Da bismo dobili analitički izraz za translaciju, uzmimo da vektor $\overrightarrow{v}$ ima koordinate (a,b,c). Neka tačka A ima koordinate (x,y,z), a tačka $A' = T_{\vec{v}}(A)$ koordinate (x',y',z'). Po definiciji je $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{v}$, odakle je

$$(x'-x, y'-y, z-z') = (a,b,c).$$

Tako dobijamo:

$$x' = x + a, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c.$$

Centralna simetrija. *Centralna simetrija u odnosu na tačku S*, u oznaci Σ_S, je preslikavanje prostora na sebe sa sledećom osobinom: ako je $\Sigma_S(A) = A'$, onda je tačka S središte duži $[AA']$.

Analitički izraz za centralnu simetriju dobijamo iz definicije. Neka je $S(p,q,r)$ centar simetrije i neka je $\Sigma_S(A) = A'$, gde tačka A ima koordinate (x,y,z), a tačka A' koordinate (x',y',z'). Prema definiciji, S je središte duži $[AA']$, pa je

$$\frac{x+x'}{2} = p, \quad \frac{y+y'}{2} = q, \quad \frac{z+z'}{2} = r.$$

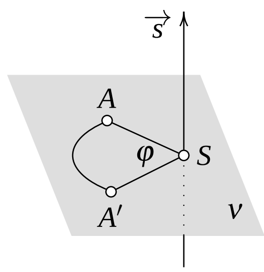
Odatle dobijamo

$$x' = 2p - x, \quad y' = 2q - y, \quad z' = 2r - z.$$

Specijalno, *simetrija u odnosu na koordinatni početak* ima sledeći analitički izraz:

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z.$$

Rotacija. Neka je $\overrightarrow{s}$ orijentisana prava u prostoru, φ orijentisani ugao i A neka tačka. Rotaciju tačke A oko prave s za ugao φ svešćemo na rotaciju u pogodno odabranoj ravni.



Neka je ν ravan koja sadrži tačku A i normalna je na pravu s, i neka je $s \cap \nu = \{S\}$. Dalje, neka je A' tačka koja se dobija rotacijom tačke A oko tačke S za ugao φ u ravni ν, ali tako da vektori $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SA'}$ i vektor pravca prave $\overrightarrow{s}$ obrazuju desni triedar ako je ugao φ pozitivan, odnosno levi triedar ako je ugao φ negativno orijentisan.

Za tačku A' kažemo da je dobijena rotacijom oko prave s za ugao φ. Odgovarajuću transformaciju zovemo *rotacija oko prave s za orijentisani ugao* φ i označavamo je sa P_s^φ. (Slovo P nije veliko latinično *pe*, već veliko grčko *ro*, koje se piše na isti način).

Analitički oblik rotacije ćemo izvesti samo za slučaj rotacije oko neke od koordinatnih osa. Zato što se rotacija tačke svodi na rotaciju u ravni koja je normalna na osu, koordinata tačke koja odgovara osi oko koje rotiramo se ne menja, dok se druge dve koordinate menjaju po zakonu koji opisuje rotaciju oko koordinatnog početka u koordinatnoj ravni koju obrazuju druge dve ose. Zato rotacija oko x-, y- i z-ose ima oblik

$$P_{Ox}^\varphi : \begin{cases} x' = x, \\ y' = y\cos\varphi - z\sin\varphi, \\ z' = y\sin\varphi + z\cos\varphi, \end{cases} \quad P_{Oy}^\varphi : \begin{cases} y' = y, \\ z' = z\cos\varphi - x\sin\varphi, \\ x' = z\sin\varphi + x\cos\varphi, \end{cases} \quad P_{Oz}^\varphi : \begin{cases} z' = z, \\ x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases}$$

Ravanska simetrija. *Ravanska simetrija u odnosu na ravan* α, u oznaci Σ_α, je preslikavanje prostora na sebe sa sledećom osobinom: ako je $\Sigma_\alpha(A) = A'$, onda je prava AA' normalna na ravan α i centar duži $[AA']$ pripada ravni α. Na osnovu definicije lako je doći do analitičkog izraza za ravansku simetriju.

Neka je α ravan čija jednačina je $Ax + By + Cz + D = 0$ i neka se ravanskom simetrijom Σ_α tačka $P(x_0, y_0, z_0)$ preslikava na tačku $Q(x', y', z')$. Neka je n normala iz tačke P na ravan α i neka je S središte duži $[PQ]$. Tačka Q leži na pravoj n, a tačka S je tačka prodora prave n kroz ravan α. Odredimo prvo koordinate (x_1, y_1, z_1) tačke S.

Parametarska jednačina prave n ima oblik $x = x_0 + At$, $y = y_0 + Bt$, $z = z_0 + Ct$. Parametar tačke S na pravoj n dobijamo uvrštavanjem ove tri jednačine u jednačinu ravni α i rešavanjem po t. Tako dobijamo da je

$$t_S = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Tačka S je središte duži $[PQ]$ što znači da je $x_1 = (x_0 + x')/2$, $y_1 = (y_0 + y')/2$, $z_1 = (z_0 + z')/2$. Uvrštavanjem gornjih izraza za x_1, y_1 i z_1, i rešavanjem po x', y', z' dobijamo da je

$$x' = x_0 - 2At_S, \quad y' = y_0 - 2Bt_S, \quad z' = z_0 - 2Ct_S.$$

Analitički oblik ravanske simetrije može da bude veoma jednostavan kada se radi o specijalnim ravnima. Na primer, za koordinatne ravni Oxy, Oxz i Oyz dobijamo:

$$\Sigma_{Oxy} : \begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \\ z' = -z, \end{cases} \qquad \Sigma_{Oxz} : \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y, \\ z' = z, \end{cases} \qquad \Sigma_{Oyz} : \begin{cases} x' = -x, \\ y' = y, \\ z' = z. \end{cases}$$

Pomenimo još jednu transformaciju koja ima važnu geometrijsku interpretaciju, ali nije transformacija podudarnosti.

Homotetija. *Homotetija sa centrom S i koeficijentom* α, u oznaci H_S^α, je preslikavanje prostora na sebe sa sledećom osobinom: ako je $H_S^\alpha(A) = A'$, onda je $\overrightarrow{SA'} = \alpha \cdot \overrightarrow{SA}$. Kao i u 2D slučaju, H_S^1 je identičko preslikavanje, a $H_S^{-1} = \Sigma_S$. Homotetijom se, dakle, neka duž preslikava na njoj paralelnu, $|\alpha|$ puta veću duž. Odatle homotetija nije transformacija podudarnosti, ali i dalje ima mnoge lepe osobine.

Homotetija sa centrom u koordinatnom početku i koeficijentom α ima veoma jednostavan analitički oblik. Ako su A i A' tačke sa koordinatama (x,y,z) i (x',y',z'), redom, i ako je $H_O^\alpha(A) = A'$, onda je

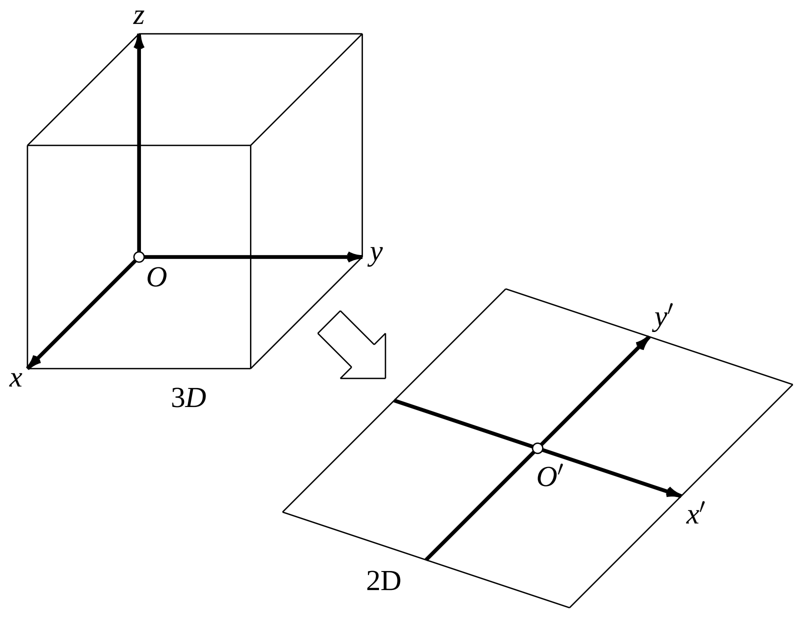
$$x' = \alpha \cdot x, \quad y' = \alpha \cdot y, \quad z' = \alpha \cdot z.$$

Homotetija sa centrom u tački $S(p,q,r)$ i koeficijento α se na uobičajeni način može svesti na homotetiju sa centrom u koordinatnom početku:

$$x' = \alpha \cdot (x - p) + p, \quad y' = \alpha \cdot (y - q) + q, \quad z' = \alpha \cdot (z - r) + r.$$

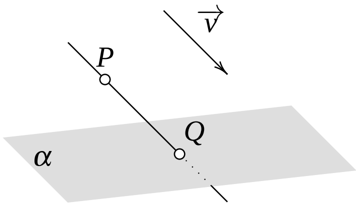
3.6 Projektovanje

Proces kojim se objekti iz prostora predstavljaju u ravni zove se *projektovanje*. Projektovanje je neko „razumno” preslikavanje π tačaka prostora (ili nekog njegovog dela) na tačke date ravni. Ravan na koju se projektuje se zove *projekciona ravan*.



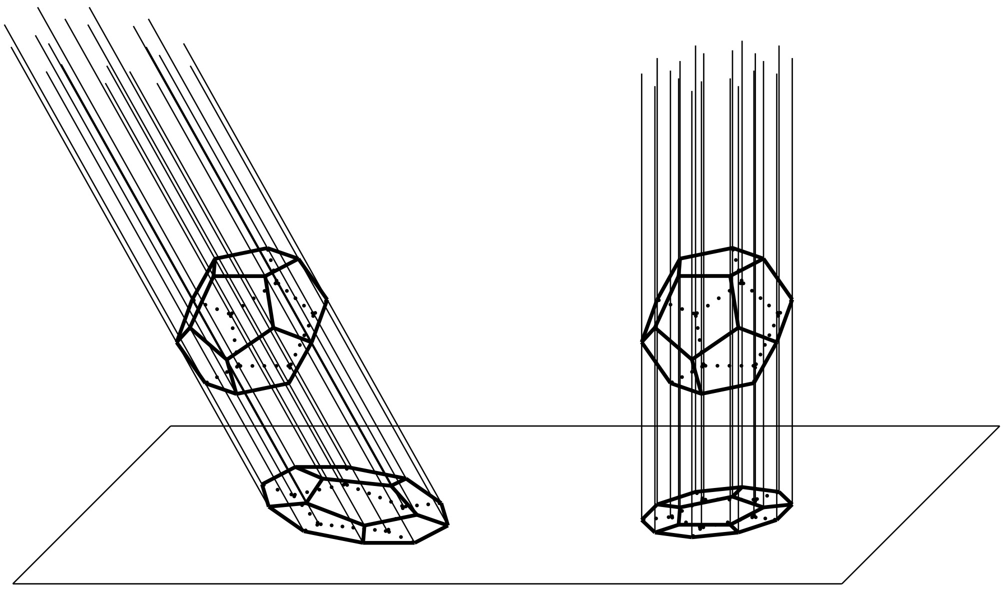
Prostorna figura $\mathscr{F}$ se projektuje tako što se projektuje svaka njena tačka posebno: $\pi(\mathscr{F}) = \{\pi(A) : A \in \mathscr{F}\}$. Slika $\pi(\mathscr{F})$ figure $\mathscr{F}$ se zove *projekcija figure* $\mathscr{F}$. Ukoliko figura $\mathscr{F}$ „ima jednostavnu strukturu”, za utvrđivanje njene projekcije dovoljno je projektovati samo neke tačke te figure, recimo, temena.

Postoje različite vrste projektovanja od kojih ćemo pomenuti dve: centralno i paralelno projektovanje. Pokazaćemo kako od raznih verzija projektovanja nastaju razne metode prikazivanja 3D objekata.



Paralelno projektovanje. Neka je α ravan i $\vec{v}$ vektor koji nije paralelan sa α. *Paralelno projektovanje u pravcu vektora* $\vec{v}$ *na ravan* α je preslikavanje $\pi_\alpha^{\vec{v}} : \mathbb{R}^3 \to \alpha$ određeno sledećom osobinom: ako je $P \in \alpha$, onda je $\pi_\alpha^{\vec{v}}(P) = P$; ako $P \notin \alpha$, onda je $\pi_\alpha^{\vec{v}}(P) = Q$ gde je $Q \in \alpha$ tačka ravni α takva da je $PQ \parallel \vec{v}$. Prava PQ se zove *projekcioni zrak*.

Specijalan slučaj paralelnog projektovanja je *normalno projektovanje* koje nastaje kada je vektor pravca projektovanja normalan na ravan projektovanja. Na slici ispod je prikazano opšte paralelno projektovanje i normalno projektovanje kao njegov specijalni slučaj.



Analitički oblik paralelnog projektovanja se lako izvodi. Neka je $\vec{v}(p,q,r)$ vektor koji određuje pravac projektovanja, a $\alpha : Ax+By+Cz+D=0$ ravan na koju se projektuje. Projekciju tačke $P(x_1,y_1,z_1)$ na ravan α u pravcu vektora $\vec{v}$ dobijamo tako što nađemo presek ravni α i prave koja sadrži P i paralelna je sa $\vec{v}$. Tako dobijamo da projekcija tačke P ima koordinate

$$x^* = x_1 + tp, \quad y^* = y_1 + tq, \quad z^* = z_1 + tr,$$

gde je

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ap + Bq + Cr}.$$

Ako se pri paralelnom projektovanju koordinatni početak jednog prostora preslikava na koordinatni početak drugog, paralelno projektovanje se može realizovati kao linearno preslikavanje. Tada je paralelno projektovanje $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ jednoznačno određeno slikama vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$, kako pokazuje sledeća teorema.

Teorema 46. *Neka je* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *linearno preslikavanje vektorskog prostora* $\mathbb{R}^3$ *u vektorski prostor* $\mathbb{R}^2$*, a* $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$*,* $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ *i* $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$ *jedinični vektori u* $\mathbb{R}^3$*. Tada za svaki vektor* $\overrightarrow{v} = (\alpha,\beta,\gamma)$ *iz* $\mathbb{R}^3$ *imamo:* $f(\overrightarrow{v}) = \alpha f(\overrightarrow{i}) + \beta f(\overrightarrow{j}) + \gamma f(\overrightarrow{k})$*.*

Dokaz. Svaki vektor $\overrightarrow{v} = (\alpha,\beta,\gamma)$ iz $\mathbb{R}^3$ se može predstaviti pomoću vektora $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{k}$ na poznat način: $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}$. Imajući to u vidu, linearnost preslikavanja f implicira:

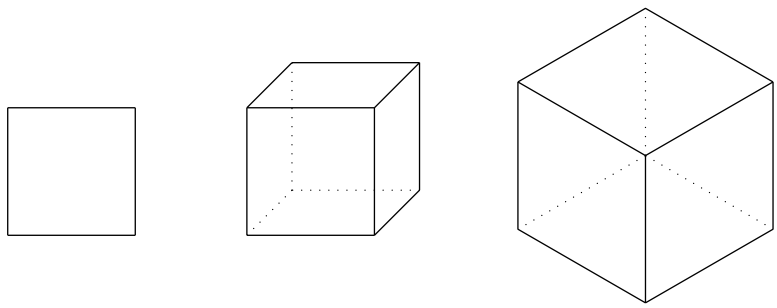
$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{v}) &= f(\alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}) \\ &= f(\alpha\overrightarrow{i}) + f(\beta\overrightarrow{j}) + f(\gamma\overrightarrow{k}) \\ &= \alpha f(\overrightarrow{i}) + \beta f(\overrightarrow{j}) + \gamma f(\overrightarrow{k}), \end{aligned}$$

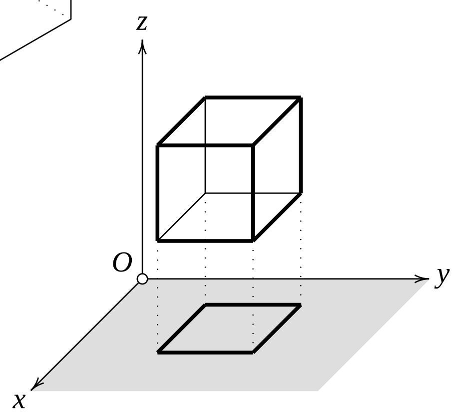
što je i trebalo pokazati. ■

Ovaj jednostavan rezultat ćemo koristiti u izvođenju analitičkog oblika sledeća tri važna specijalna slučaja paralelnog projektovanja:

- normalno projektovanje na *xy*-ravan;
- koso projektovanje na *xy*-ravan pod uglom $\operatorname{arctg}(4)$; i
- aksonometrija.

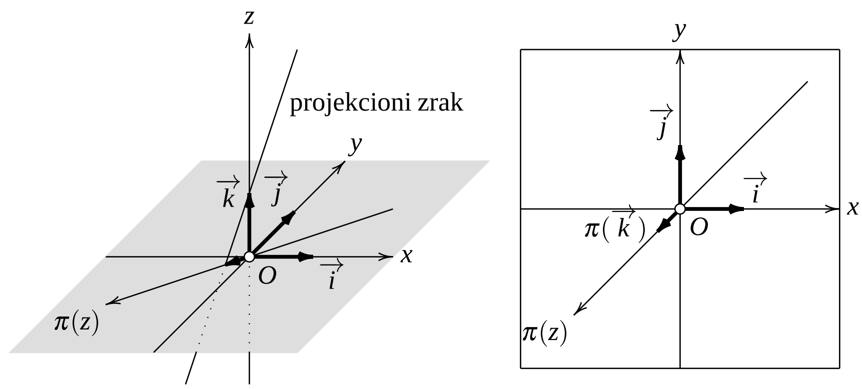
Na slici ispod prikazana je projekcija kocke na sva tri načina:





Normalno projektovanje na xy-ravan. Kod normalnog projektovanja na *xy*-ravan se tačka (x,y,z) projektuje na tačku (x,y). Ovaj metod prikazivanja 3D situacije je veoma efikasan, ali ne daje dovoljno informacija o „trodimenzionalnosti” i prostornim odnosima objekata koji se projektuju. Zato se najčešće koristi kada na raspolaganju imamo i neke transformacije (recimo, rotaciju) koje će nam omogućiti da situaciju pogledamo „i sa druge strane”.

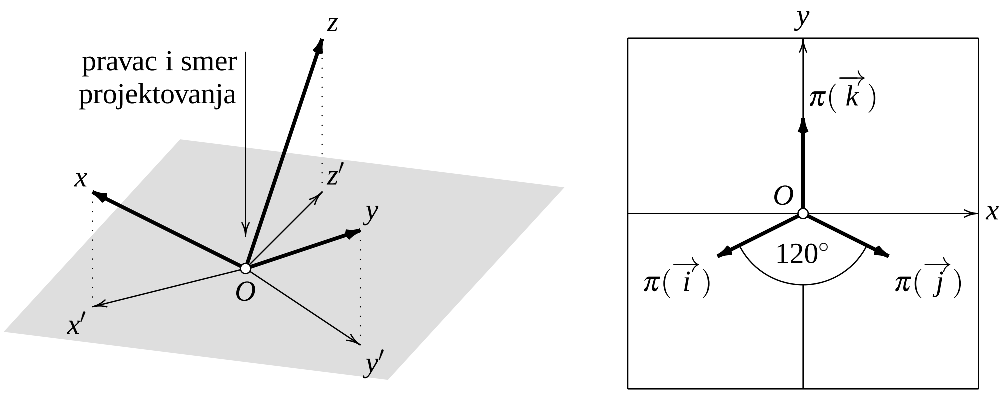
Koso projektovanje na xy-ravan pod uglom $\operatorname{arctg}(4)$. Kod ove vrste kosog projektovanja na *xy*-ravan, zraci su postavljeni pod uglom $\operatorname{arctg}(4)$ kako bi se dobio utisak perspektivnog skraćenja treće dimenzije. Pravac projektovanja je takav da se *z*-osa projektuje na simetralu prvog i trećeg kvadranta *xy*-ravni, a ugao $\operatorname{arctg}(4)$ je odabran zato da se jedinični vektor $\overrightarrow{k}$ projektuje na vektor dužine $1/4$ koji sa pozitivnim smerom *x*-ose u *xy*-ravni zaklapa ugao $-3\pi/4$.



To znači da je $\pi(\overrightarrow{i}) = (1,0)$, $\pi(\overrightarrow{j}) = (0,1)$, a $\pi(\overrightarrow{k}) = (-\sqrt{2}/8, -\sqrt{2}/8)$, gde je sa π označeno ovako opisano projektovanje. Na osnovu toga i razmatranja iz prethodnog odeljka lako se dobija njegov analitički oblik. Neka je $\pi(A) = A'$, gde tačka A ima koordinate (x_0, y_0, z_0), a tačka A' ima koordinate (x', y'). Tada je

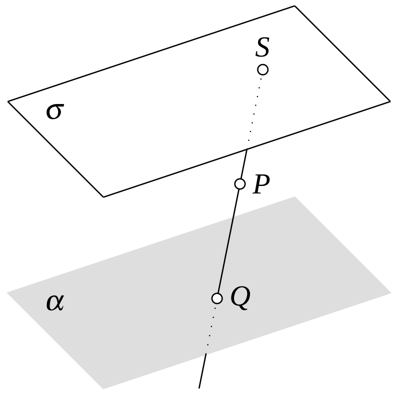
$$x' = x_0 - z_0\frac{\sqrt{2}}{8}, \quad y' = y_0 - z_0\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Aksonometrija. Aksonometrija je paralelno projektovanje na ravan $x+y+z = 0$ u pravcu vektora $(1,1,1)$. Jedinični vektori se projektuju na vektore iste dužine koji zaklapaju uglove od po $2\pi/3$:

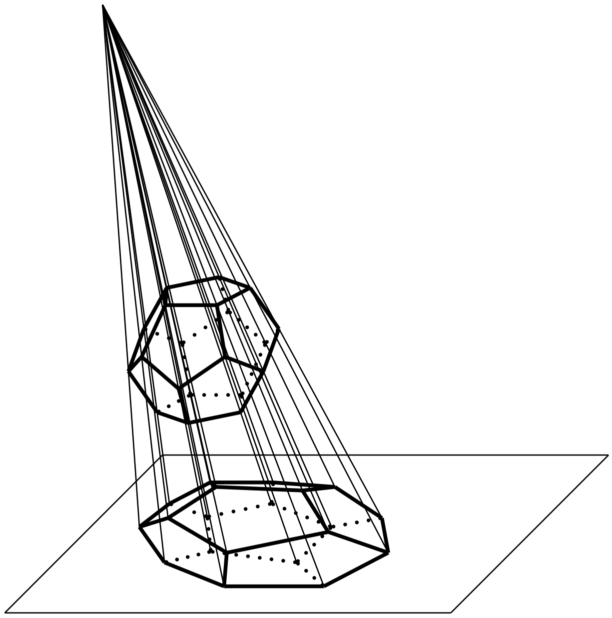


Iako vektori $\pi(\overrightarrow{i})$, $\pi(\overrightarrow{j})$, $\pi(\overrightarrow{k})$ nisu jedinični vektori, u cilju jednostavnijeg računa se umesto njih uzimaju vektori dužine 1. Tako, aksonometrija predstavlja kompoziciju paralelnog projektovanja i homotetije. Neka je π aksonometrija i neka je $\pi(A) = A'$, gde tačka A ima koordinate (x_0, y_0, z_0), a tačka A' ima koordinate (x', y'). Tada je

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}(y_0 - x_0), \quad y' = z_0 - \frac{1}{2}(y_0 + x_0).$$



Centralno projektovanje. Neka je α neka ravan i S tačka koja joj ne pripada. Neka je σ ravan koja sadrži tačku S i paralelna je sa α. *Centralno projektovanje iz tačke S na ravan α* je preslikavanje $\pi_\alpha^S : \mathbb{R}^3 \setminus \sigma \to \alpha$ određeno sledećom osobinom: ako je $\pi_\alpha^S(P) = Q$, onda je $Q \in \alpha$ i tačke S, P, Q su kolinearne. Prava SP se zove *projekcioni zrak*, a tačka *S centar projekcije*. Primetimo da su tačke ravni σ izuzete iz domena preslikavanja π_α^S zato što za njih projekcioni zrak ne seče ravan α. Jedan ozbiljniji primer centralnog projektovanja je dat na sledećoj slici:



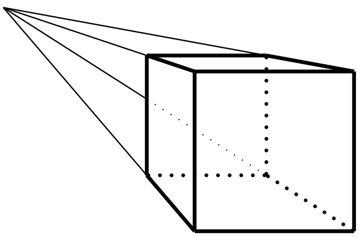
Analitički oblik centralnog projektovanja se lako izvodi. Neka je $S(x_0, y_0, z_0)$ centar projektovanja, a $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$ ravan na koju se projektuje. Projekcija tačke $P(x_1, y_1, z_1)$ se dobija u preseku ravni α i prave PS. Zato ona ima koordinate

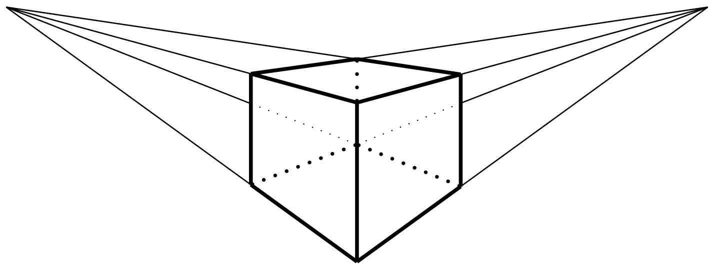
$$x^* = x_0 + t(x_1 - x_0), \quad y^* = y_0 + t(y_1 - y_0), \quad z^* = z_0 + t(z_1 - z_0),$$

gde je

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)}.$$

Centralno projektovanje i perspektiva. Centralno projektovanje na specijalne ravni se koristi za postizanje efekta perspektive. Na slici ispod je prikazana projekcija kocke centralnim projektovanjem sa jednim i dva centra perspektive, a mi ćemo u ovom tekstu diskutovati samo projektovanje sa jednim centrom perspektive.





Projektovanje iz koordinatnog početka na ravan $z = D$ daje efekat projektovanja sa jednim centrom perspektive. Tačka u kojoj z-osa prodire ravan $z = D$ je tačka nedogleda svake prave koja je normalna na ravan projektovanja. Ona predstavlja centar perspektive. Ako tu tačku odaberemo za koordinatni početak koordinatnog sistema ravni projektovanja, i ako ose koordinatnog sistema ravni postavimo tako da imaju isti pravac i smer kao odgovarajuće ose koordinatnog sistema prostora (Sl. 3.1), onda je centar perspektive u tački $(0,0)$, dok se tačka (x_0, y_0, z_0) prostora projektuje na tačku (x', y') čije koordinate ćemo sada izračunati.

Jednačina prave koja je određena tačkama $(0,0,0)$ i (x_0, y_0, z_0) ima veoma jednostavan oblik:

$$x = x_0 \cdot t, \quad y = y_0 \cdot t, \quad z = z_0 \cdot t.$$

Ova prava seče ravan $z = D$ u tački čiji parametar se dobija rešavanjem jednačine

$$z_0 \cdot t = D$$

po t, odakle se lako vidi da je $t = D/z_0$. Dakle, pomenuta prava seče ravan $z = D$ u tački (x', y', D) gde je $x' = D\dfrac{x_0}{z_0}$, $\quad y' = D\dfrac{y_0}{z_0}$. Posebno, u slučaju $D = 1$ dobijamo da je $x' = \dfrac{x_0}{z_0}$, $\quad y' = \dfrac{y_0}{z_0}$.

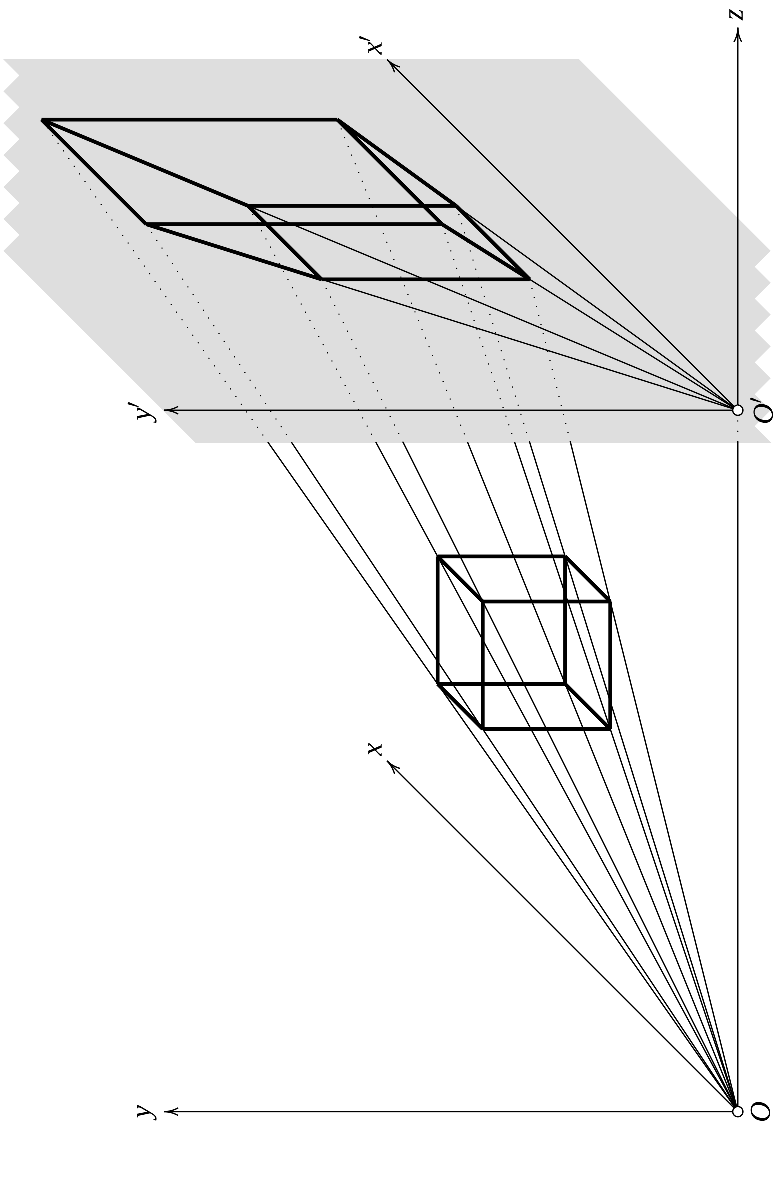
3.7 Rotacija, kompleksni brojevi i kvaternioni

U ravni, rotacija tačke za ugao θ oko koordinatnog početka ima veoma jednostavnu interpretaciju preko kompleksnih brojeva. Neka je $z = x + iy$ kompleksni broj koji odgovara tački $A(x, y)$, neka je

$$q = \cos\theta + i \sin\theta$$

kompleksni broj koji „opisuje rotaciju za ugao θ" i neka je $z' = x' + iy'$ kompleksni broj koji se dobija kao

$$z' = z \cdot q.$$



Slika 3.1: Centralno projektovanje sa jednim centrom perspektive

Tada se lako vidi da je

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

odnosno, da kompleksni broj z' opisuje tačku koja se dobija rotacijom tačke A za ugao θ oko kooordinatnog početka.

Slično situaciji u ravni, gde se rotacija oko koordinatnog početka može realizovati množenjem kompleksnih brojeva, rotacija oko prave koja prolazi kroz koordinatni početak može se realizovati pomoću kvaterniona, koji predstavljaju uopštenje kompleksnih brojeva.

Neka su $i,\ j,\ k$ tri *imaginarne jedinice*, tj. objekti koji zadovoljavaju

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1,$$

i neka je još

$$\begin{array}{lll} ij = k, & jk = i, & ki = j \\ ji = -k, & kj = -i, & ik = -j. \end{array}$$

Tada broj oblika $q = s + ia + jb + kc$, gde su $s, a, b, c \in \mathbb{R}$, zovemo *kvaternion*. Slično kompleksnim brojevima, operacije nad kvaternionima su određene pravilima za množenje imaginarnih jedinica i, j i k. Neka su $q = s + ia + jb + kc$ i $q' = s' + ia' + jb' + kc'$ dva kvaterniona. Tada je

$$q + q' = (s + s') + i(a + a') + j(b + b') + k(c + c')$$

zbir kvaterniona q i q', dok je *suprotni kvaternion* kvaterniona q jednak

$$-q = -s - ia - ib - ic.$$

Nula-kvaternion je kvaternion $0 = 0 + i \cdot 0 + j \cdot 0 + k \cdot 0$. *Modul* kvaterniona q je realan broj

$$|q| = \sqrt{s^2 + a^2 + b^2 + c^2},$$

a kvaternion sa osobinom $|q| = 1$ se naziva *jedinični kvaternion*. Za kvaternion

$$\overline{q} = s - ia - ib - ic$$

kažemo da je *konjugovani kvaternion* kvaternionu q.

Proizvod kvaterniona q i q' se računa na osnovu pravila za množenje imaginarnih jedinica:

$$\begin{aligned} q \cdot q' &= (s + ia + jb + kc)(s' + ia' + jb' + kc') \\ &= (ss' - aa' - bb' - cc') + i(sa' + as' + bc' - cb') \\ &\quad + j(sb' - ac' + bs' + ca') + k(sc' + ab' - ba' + cs'). \end{aligned}$$

Lako se vidi da je $q \cdot \overline{q} = |q|^2$, tako da svaki ne-nula kvaternion ima inverzni kvaternion:

$$q^{-1} = \frac{1}{|q|^2}\overline{q}.$$

Množenje kvaterniona je asocijativno (što ostavljamo za vežbu), i tako smo pokazali da kvaternioni obrazuju telo (tj. algebarsku strukturu sa dve operacije u kojoj množenje nije komutativno).

Za tačku $A(a,b,c)$, kvaternion

$$p_A = ia + jb + kc$$

nazivamo *kvaternion tačke A*. Ako je $\overrightarrow{u} = (u_x, u_y, u_z)$ jedinični vektor, a θ neki ugao, kvaternion

$$q_{\overrightarrow{u},\theta} = \cos\frac{\theta}{2} + (iu_x + ju_y + ku_z)\sin\frac{\theta}{2}$$

zovemo *kvaternion rotacije za ugao θ oko ose $\overrightarrow{u}$.*

Stav 47. *Neka je $A(a,b,c)$ proizvoljna tačka i $\overrightarrow{u} = (u_x, u_y, u_z)$ jedinični vektor. Dalje, neka je p kvaternion tačke A i q kvaternion rotacije za ugao θ oko ose $\overrightarrow{u}$. Tada je*

$$p' = qpq^{-1}$$

kvaternion tačke $A'(a',b',c')$ koja se dobija rotacijom tačke A za ugao θ oko prave koja prolazi kroz koordinatni početak i paralelna je vektoru $\overrightarrow{u}$.

Dokaz. Pogledajmo prvo kako izgleda kvaternion qpq^{-1} kada je q proizvoljan jedinični kvaternion. Neka je $q = s + iu + jv + kw$ gde je $s^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 1$. Tada je $q^{-1} = s - iu - jv - kw$, $p = ia + jb + kc$ pa nakon kraćeg računa dobijamo:

$$\begin{aligned} qpq^{-1} = {} & i((u^2 + s^2 - w^2 - v^2)a + (2uv - 2sw)b + (2uw + 2sv)c) \\ & + j((2vu + 2ws)a + (v^2 - w^2 + s^2 - u^2)b + (2vw - 2su)c) \\ & + k((2wu - 2vs)a + (2wv + 2us)b + (w^2 - v^2 - u^2 + s^2)c). \end{aligned}$$

Vidimo da je qpq^{-1} zbilja kvaternion neke tačke. Ako uzmemo da je qpq^{-1} kvaternion tačke $A'(a',b',c')$ tada se veza $p' = qpq^{-1}$ može zapisati u matričnom obliku na sledeći način:

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^2 + s^2 - w^2 - v^2 & 2uv - 2sw & 2uw + 2sv \\ 2vu + 2ws & v^2 - w^2 + s^2 - u^2 & 2vw - 2su \\ 2wu - 2vs & 2wv + 2us & w^2 - v^2 - u^2 + s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

odnosno, ako se uzme u obzir da je $s^2 = 1 - u^2 - v^2 - w^2$:

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2(w^2 + v^2) & 2uv - 2sw & 2uw + 2sv \\ 2vu + 2ws & 1 - 2(w^2 + u^2) & 2vw - 2su \\ 2wu - 2vs & 2wv + 2us & 1 - 2(v^2 + u^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Kvaternion q, međutim, nije proizvoljan kvaternion, već je

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + (u_x i + u_y j + u_z k)\sin\frac{\theta}{2},$$

gde je $\overrightarrow{u} = (u_x, u_y, u_z)$ jedinični vektor koji određuje osu rotacije, a θ je ugao rotacije. Komponente kvaterniona q su, dakle, $s = \cos\frac{\theta}{2}$, $u = u_x \sin\frac{\theta}{2}$, $v = u_y \sin\frac{\theta}{2}$, $w = u_z \sin\frac{\theta}{2}$, pa matrica prethodne transformacije postaje

$$\begin{bmatrix} 1-2(u_y^2+u_z^2)\sin^2\frac{\theta}{2} & 2u_xu_y\sin^2\frac{\theta}{2}-2u_z\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & 2u_xu_z\sin^2\frac{\theta}{2}+2u_y\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ 2u_xu_y\sin^2\frac{\theta}{2}+2u_z\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & 1-2(u_x^2+u_z^2)\sin^2\frac{\theta}{2} & 2u_yu_z\sin^2\frac{\theta}{2}-2u_x\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ 2u_xu_z\sin^2\frac{\theta}{2}-2u_y\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & 2u_yu_z\sin^2\frac{\theta}{2}+2u_x\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & 1-2(u_x^2+u_y^2)\sin^2\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

Dalje, zbog $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$ je

$$1-2(u_y^2+u_z^2)\sin^2\frac{\theta}{2} = 1-2(1-u_x^2)\sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta + u_x^2(1-\cos\theta),$$

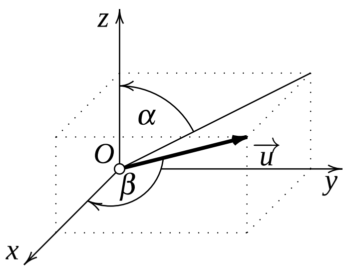
tako da matrica uz još nekoliko očiglednih trigonometrijskih transformacija postaje:

$$\begin{bmatrix} u_x^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & u_xu_y(1-\cos\theta)-u_z\sin\theta & u_xu_z(1-\cos\theta)+u_y\sin\theta \\ u_xu_y(1-\cos\theta)+u_z\sin\theta & u_y^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & u_yu_z(1-\cos\theta)-u_x\sin\theta \\ u_xu_z(1-\cos\theta)-u_y\sin\theta & u_yu_z(1-\cos\theta)+u_x\sin\theta & u_z^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix}$$

što je, prema Stavu 48 koji sledi, matrica rotacije za ugao θ oko prave koja prolazi kroz koordinatni početak i paralelna je vektoru $\overrightarrow{u}$. ■

Da bismo završili argument, ostaje nam još da izvedemo matricu rotacije oko proizvoljne prave u prostoru.

Stav 48. *Rotacija za ugao θ oko prave koja prolazi kroz koordinatni početak i paralelna je jediničnom vektoru $\overrightarrow{u} = (u_x, u_y, u_z)$ može da se predstavi matricom na sledeći način:*

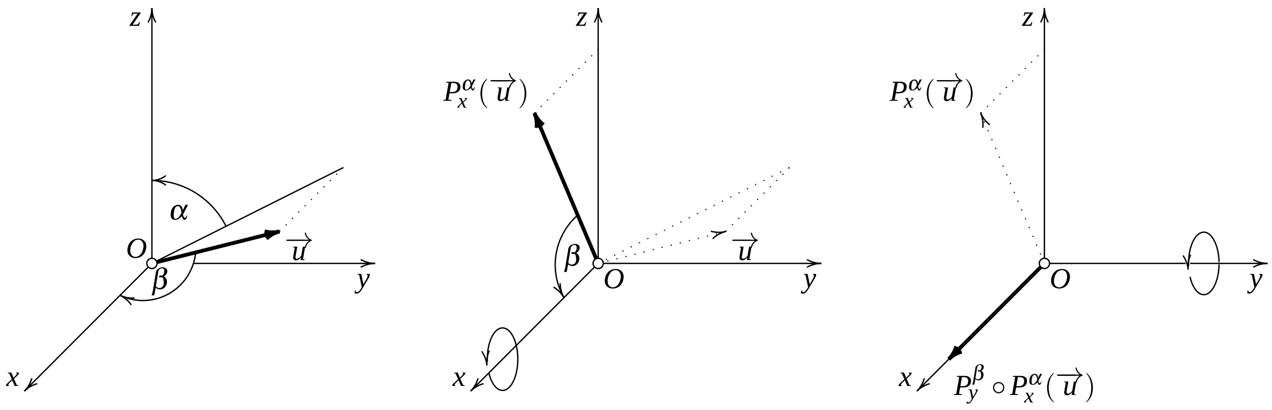


$$\begin{bmatrix} u_x^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & u_xu_y(1-\cos\theta)-u_z\sin\theta & u_xu_z(1-\cos\theta)+u_y\sin\theta \\ u_xu_y(1-\cos\theta)+u_z\sin\theta & u_y^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & u_yu_z(1-\cos\theta)-u_x\sin\theta \\ u_xu_z(1-\cos\theta)-u_y\sin\theta & u_yu_z(1-\cos\theta)+u_x\sin\theta & u_z^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix}$$

Dokaz. Rotacija za ugao θ oko prave koja prolazi kroz koordinatni početak i paralelna je jediničnom vektoru $\overrightarrow{u} = (u_x, u_y, u_z)$ može da se predstavi kao sledeća kompozicija rotacija

$$P_x^{-\alpha} \circ P_y^{-\beta} \circ P_x^{\theta} \circ P_y^{\beta} \circ P_x^{\alpha}$$

gde je α ugao suprotan uglu koga sa pozitivnim smerom z-ose zaklapa projekcija vektora $\overrightarrow{u}$ na koordinatnu ravan Oyz, a β ugao suprotan uglu koga sa pozitivnim smerom x-ose zaklapa vektor $\overrightarrow{u}$.



Kako je $\sin\alpha = \frac{u_y}{\sqrt{{u_y}^2+{u_z}^2}}$, $\sin\beta = \sqrt{{u_y}^2+{u_z}^2}$, $\cos\alpha = \frac{u_z}{\sqrt{{u_y}^2+{u_z}^2}}$ i $\cos\beta = u_x$, dobijamo

$$P_x^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_z}{\sqrt{{u_y}^2+{u_z}^2}} & -\frac{u_y}{\sqrt{{u_y}^2+{u_z}^2}} \\ 0 & \frac{u_y}{\sqrt{{u_y}^2+{u_z}^2}} & \frac{u_z}{\sqrt{{u_y}^2+{u_z}^2}} \end{bmatrix}, \quad P_y^\beta = \begin{bmatrix} u_x & 0 & \sqrt{{u_y}^2+{u_z}^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{{u_y}^2+{u_z}^2} & 0 & u_x \end{bmatrix}.$$

Matrice za $P_x^{-\alpha}$ i $P_y^{-\beta}$ se dobijaju analogno, pa nakon elementarnog, ali napornog računa dobijamo

$$P_x^{-\alpha} \circ P_y^{-\beta} \circ P_x^{\theta} \circ P_y^{\beta} \circ P_x^{\alpha} =$$

$$\begin{bmatrix} u_x^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & u_xu_y(1-\cos\theta)-u_z\sin\theta & u_xu_z(1-\cos\theta)+u_y\sin\theta \\ u_xu_y(1-\cos\theta)+u_z\sin\theta & u_y^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & u_yu_z(1-\cos\theta)-u_x\sin\theta \\ u_xu_z(1-\cos\theta)-u_y\sin\theta & u_yu_z(1-\cos\theta)+u_x\sin\theta & u_z^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix}$$

čime je dokaz završen. ■

3.8 Implementacija: Quaternion, Point3D, Line3D i Plane3D

Klasa Quaternion implementira rad sa kvaternionima. Nju ćemo upotrebiti za implementaciju metoda koji rotira tačku oko proizvoljne prave u prostoru. Kvaternion je opisan kao četvorka brojeva s, a, b i c. Konstruktor Quaternion(Point3D A) vraća kvaternion tačke A, dok konstruktor Quaternion(double theta, Point3D u) vraća kvaternion rotacije za ugao theta oko vektora u koji ne mora biti jedinični vektor.

```
public class Quaternion {
  public double s, a, b, c;

  public Quaternion(double s, double a, double b, double c) {
    this.s = s; this.a = a; this.b = b; this.c = c;
  }
```

```
  public Quaternion(Point3D A) {
    s = 0.0; a = A.x; b = A.y; c = A.z;
  }

  public Quaternion(double theta, Point3D u) {
    Point3D v = new Point3D(u);
    v.normalize();
    double k = Math.sin(theta/2.0);
    s = Math.cos(theta/2.0); a =  v.x*k; b =  v.y*k; c =  v.z*k;
  }
```

Metod q.length() određuje dužinu kvaterniona q. Metod q.conjugate() određuje konjugovani kvaternion kvaterniona q. Metod r.plus(q) određuje zbir kvaterniona r i q, metod r.multiply(k) određuje proizvod kvaterniona r i realnog broja k, dok metod r.multiply(q) određuje proizvod kvaterniona r i q. Konačno, metod r.invert() invertuje kvaternion r.

```
  public double length() {
    return Math.sqrt(s*s + a*a + b*b + c*c);
  }

  public Quaternion conjugate() {
    return new Quaternion(s, -a, -b, -c);
  }

  public Quaternion plus(Quaternion q) {
    return new Quaternion(s + q.s, a + q.a, b + q.b, c + q.c);
  }

  public Quaternion multiply(double k) {
    return new Quaternion(k*s, k*a, k*b, k*c);
  }

  public Quaternion multiply(Quaternion q) {
    return new Quaternion(s*q.s - a*q.a - b*q.b - c*q.c,
                          s*q.a + a*q.s + b*q.c - c*q.b,
                          s*q.b + b*q.s + c*q.a - a*q.c,
                          s*q.c + c*q.s + a*q.b - b*q.a);
  }

  public Quaternion invert() {
    double L = length();
    if(L == 0.0) {
      System.out.println("Quaternioin: invert: zero quaternion");
      System.exit(0);
    }
    return conjugate().multiply(1.0 / (L * L));
  }
}
```

Klasa Point3D implementira tačku, odnosno, vezani vektor u prostoru. Tačku, odnosno vezani vektor, u prostoru opisujemo njenim koordinatama – trojkom realnih brojeva:

```
public class Point3D {
  public double x, y, z;

  public Point3D(double x, double y, double z) {
    this.x = x; this.y = y; this.z = z;
  }

  public Point3D(Point3D A) {
    this.x = A.x; this.y = A.y; this.z = A.z;
  }
```

Metod Q.length() računa dužinu vektora $\overrightarrow{OQ}$, metod Q.dist(P) računa rastojanje tačaka P i Q, dok metod Q.normalize() normalizuje vektor $\overrightarrow{OQ}$ tako što ga podeli njegovom dužinom i svede na jedinični vektor istog pravca i smera. Metod Q.minus(P) računa vektor $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$, dok metod Q.plus(P) računa vektor $\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP}$.

```
  public double length() {
    return Math.sqrt(MyMath.sqr(x) + MyMath.sqr(y) + MyMath.sqr(z));
  }

  public double dist(Point3D P) {
    return Math.sqrt(MyMath.sqr(x - P.x) + MyMath.sqr(y - P.y)
                 + MyMath.sqr(z - P.z));
  }

  public void normalize() {
    double L = length();
    if(L == 0.0) {
      System.out.println("Point3D: normalize: length == 0.0");
      System.exit(0);
    }
    x /= L; y /= L; z /= L;
  }

  public Point3D minus(Point3D P) {
    return new Point3D(x - P.x, y - P.y, z - P.z);
  }

  public Point3D plus(Point3D P) {
    return new Point3D(x + P.x, y + P.y, z + P.z);
  }
```

Metod Q.dot(P) računa skalarni proizvod $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP}$, dok metod Q.cross(P) računa vektorski proizvod $\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OP}$. Metod Q.midpoint(P) računa središte duži

PQ, a statički metod collinear(P, Q, R) utvrđuje da li su tačke P, Q i R kolineame.

```
public double dot(Point3D P) {
  return x * P.x + y * P.y + z * P.z;
}

public Point3D cross(Point3D P) {
  return new Point3D(MyMath.det2(y, P.z, P.y, z),
                   MyMath.det2(z, P.x, P.z, x),
                   MyMath.det2(x, P.y, P.x, y));
}

public Point3D midpoint(Point3D P) {
  return new Point3D((x + P.x) / 2.0, (y + P.y) / 2.0, (z + P.z) / 2.0);
}

public static boolean collinear(Point3D P, Point3D Q, Point3D R) {
  Point3D A = Q.minus(P);
  Point3D B = R.minus(P);
  return MyMath.approxEqual(A.cross(B).length(), 0.0);
}
```

Sledi niz metoda koji implementiraju transformacije u ravni. Metod P.opposite() transformiše vektor $\overrightarrow{OP}$ u vektor $-\overrightarrow{OP}$. Metod Q.translate(P) translira tačku Q za vektor $\overrightarrow{OP}$. Metod Q.reflect(P) preslikava tačku Q centralnom simetrijom sa centrom P. Metod Q.mirror(P) preslikava tačku Q ravanskom simetrijom u odnosu na ravan P (videti opis klase Plane3D koji sledi). Metodi Q.rotX(phi), Q.rotY(phi) i Q.rotZ(phi) rotiraju tačku Q za ugao phi oko x-ose, y-ose, odnosno, z-ose. Metod Q.scale(P, coeff) preslikava tačku Q homotetijom sa centrom P i koeficijentom coeff. Konačno, metod P.apply(T) na tačku P primenjuje afinu transformaciju T.

```
public void opposite() { x = -x; y = -y; z = -z; }

public void translate(Point3D P) { x += P.x; y += P.y; z += P.z; }

public void reflect(Point3D P) {
  x = 2.0 * P.x - x; y = 2.0 * P.y - y; z = 2.0 * P.z - z;
}

public void mirror(Plane3D P) {
  double t = P.N.x * (x - P.A.x) + P.N.y * (y - P.A.y) + P.N.z * (z - P.A.z);
  x -= 2.0 * P.N.x * t;
  y -= 2.0 * P.N.y * t;
  z -= 2.0 * P.N.z * t;
}
```

```
  public void rotX(double phi) {
    double y2 = Math.cos(phi)*y - Math.sin(phi)*z;
    double z2 = Math.sin(phi)*y + Math.cos(phi)*z;
    y = y2; z = z2;
  }

  public void rotY(double phi) {
    double z2 = Math.cos(phi)*z - Math.sin(phi)*x;
    double x2 = Math.sin(phi)*z + Math.cos(phi)*x;
    x = x2; z = z2;
  }

  public void rotZ(double phi) {
    double x2 = Math.cos(phi)*x - Math.sin(phi)*y;
    double y2 = Math.sin(phi)*x + Math.cos(phi)*y;
    x = x2; y = y2;
  }

  public void scale(Point3D P, double coeff) {
    x = coeff*(x - P.x) + P.x;
    y = coeff*(y - P.y) + P.y;
    z = coeff*(z - P.z) + P.z;
  }

  public void apply(Affine3D T) {
    double x2 = T.a00*x + T.a01*y + T.a02*z + T.b0;
    double y2 = T.a10*x + T.a11*y + T.a12*z + T.b1;
    double z2 = T.a20*x + T.a21*y + T.a22*z + T.b2;
    x = x2; y = y2; z = z2;
  }
```

Poslednja transformacija koju navodimo implementira rotaciju tačke oko prave. Metod P.rot(L, phi) će zarotirati tačku P oko prave L za ugao phi. Prvo celu konfiguraciju transliramo za vektor $-\overrightarrow{OA}$ (gde je A jedna tačka prave L) tako da prava oko koje rotiramo prođe kroz koordinatni početak, potom primenimo odgovarajući račun sa kvaternionima, i onda dobijenu tačku transliramo za vektor $\overrightarrow{OA}$.

```
  public void rot(Line3D L, double phi) {
    // kvaternion rotacije
    Quaternion R = new Quaternion(phi, L.B.minus(L.A));
    // kvaternion tacke
    Quaternion A = new Quaternion(this.minus(L.A));
    // kvaternion zarotirane tacke
    Quaternion B = R.multiply(A).multiply(R.invert());
    x = B.a + L.A.x;
    y = B.b + L.A.y;
    z = B.c + L.A.z;
  }
}
```

Klasa Line3D opisuje pravu ili duž u prostoru, u zavisnosti od konteksta. Analogno situaciji u ravni, i jedan i drugi objekt su opisani dvema tačkama A i B: u slučaju da instancu ove klase shvatamo kao opis prave, radi se o pravoj AB, a u slučaju da je shvatamo kao opis duži, radi se o duži $[AB]$.

```
public class Line3D {
  public Point3D A, B;

  public Line3D(Point3D A, Point3D B) {
    this.A = A; this.B = B;
  }
```

Metod M.orthogonal(L) utvrđuje da li su prave M i L ortogonalne, dok metod segmentBisector određuje simetralnu ravan duži $[AB]$.

```
  public boolean orthogonal(Line3D L) {
    Point3D V1 = (new Point3D(A)).minus(B);
    Point3D V2 = (new Point3D(L.A)).minus(L.B);
    return MyMath.approxEqual(V1.dot(V2), 0.0);
  }

  public Plane3D segmentBisector() {
    return new Plane3D(A.midpoint(B), B.minus(A));
  }
```

Metod L.lineContains(P) utvrđuje da li prava AB sadrži tačku P, dok metod L.segmentContains(P) utvrđuje da li duž $[AB]$ sadrži tačku P. Metod M.intersection(L) određuje tačku preseka pravih L i M. Ako se prave ne seku metod vraća null.

```
  public boolean lineContains(Point3D P) {
    double t = 0.0;
    if(A.x != B.x) { t = (P.x - A.x) / (B.x - A.x); }
    else if(A.y != B.y) { t = (P.y - A.y) / (B.y - A.y); }
    else if(A.z != B.z) { t = (P.z - A.z) / (B.z - A.z); }
    else {
      System.out.println("Line3D: lineContains: line is degenerate");
      System.exit(0);
    }
    return MyMath.approxEqual(P.x, A.x + t * (B.x - A.x)) &&
           MyMath.approxEqual(P.y, A.y + t * (B.y - A.y)) &&
           MyMath.approxEqual(P.z, A.z + t * (B.z - A.z));
  }

  public boolean segmentContains(Point3D P) {
    double t = 0.0;
    if(A.x != B.x) { t = (P.x - A.x) / (B.x - A.x); }
    else if(A.y != B.y) { t = (P.y - A.y) / (B.y - A.y); }
    else if(A.z != B.z) { t = (P.z - A.z) / (B.z - A.z); }
    else {
```

```
      System.out.println("Line3D: segmentContains: segment is degenerate");
      System.exit(0);
    }
    return MyMath.approxEqual(P.x, A.x + t * (B.x - A.x)) &&
          MyMath.approxEqual(P.y, A.y + t * (B.y - A.y)) &&
          MyMath.approxEqual(P.z, A.z + t * (B.z - A.z)) &&
          0.0 <= t && t <= 1.0;
  }

  public Point3D intersection(Line3D L) {
    double dx = B.x - A.x; double Ldx = L.B.x - L.A.x;
    double dy = B.y - A.y; double Ldy = L.B.y - L.A.y;
    double dz = B.z - A.z; double Ldz = L.B.z - L.A.z;
    double s;
    if(MyMath.det2(dx, dy, -Ldx, -Ldy) != 0.0) {
      s = MyMath.det2(dx, dy, L.A.x - A.x, L.A.y - A.y)
          /MyMath.det2(dx, dy, -Ldx, -Ldy);
    }
    else if(MyMath.det2(dx, dz, -Ldx, -Ldz) != 0.0) {
      s = MyMath.det2(dx, dz, L.A.x - A.x, L.A.z - A.z)
          /MyMath.det2(dx, dz, -Ldx, -Ldz);
    }
    else if(MyMath.det2(dy, dz, -Ldy, -Ldz) != 0.0) {
      s = MyMath.det2(dy, dz, L.A.y - A.y, L.A.z - A.z)
          /MyMath.det2(dy, dz, -Ldy, -Ldz);
    }
    else return null;
    double x = L.A.x + s * Ldx;
    double y = L.A.y + s * Ldy;
    double z = L.A.z + s * Ldz;
    Point3D Q = new Point3D(x, y, z);
    if(lineContains(Q)) return Q;
    return null;
  }
```

Konačno, transformacije se na pravu/duž primenjuju tako što se na svaku od tačaka A i B primeni odgovarajuća transformacija.

```
  public void translate(Point3D P) { A.translate(P); B.translate(P); }

  public void reflect(Point3D P) { A.reflect(P); B.reflect(P); }

  public void mirror(Plane3D P) { A.mirror(P); B.mirror(P); }

  public void rotX(double phi) { A.rotX(phi); B.rotX(phi); }

  public void rotY(double phi) { A.rotY(phi); B.rotY(phi); }

  public void rotZ(double phi) { A.rotZ(phi); B.rotZ(phi); }

  public void scale(Point3D P, double coeff) { A.scale(P, coeff); B.scale(P, coeff); }
```

```
  public void apply(Affine3D T) { A.apply(T); B.apply(T); }
```

Klasa Plane3D opisuje ravan u prostoru. Ravan predstavljamo pomoću vektora N koji je normalan na ravan i pomoću tačke A koja pripada ravni. Konstruktor Plane3D(Point3D P, Point3D Q, Point3D R) konstruiše ravan koja je određena tačkama P, Q i R.

```
public class Plane3D {
  public Point3D N; // vektor normale
  public Point3D A; // jedna tacka ravni

  public Plane3D(Point3D P, Point3D normal) {
    A = new Point3D(P);
    N = new Point3D(normal);
  }

  public Plane3D(Point3D P, Point3D Q, Point3D R) {
    if(Point3D.collinear(P, Q, R)) {
      System.out.println("Plane3D: Plane3D: collinear points in constructor");
      System.exit(0);
    }
    N = Q.minus(P).cross(R.minus(P));
    A = new Point3D(P);
  }
```

Metod S.contains(P) utvrđuje da li ravan S sadrži tačku P, dok metod S.contains(L) utvrđuje da li ravan S sadrži pravu L. Metod S.dist(P) određuje rastojanje tačke P od ravni S, a metod S.leftOrRight(P) određuje sa koje strane ravni S se nalazi tačka P.

```
  public boolean contains(Point3D P) {
    return MyMath.approxEqual(P.minus(A).dot(N), 0.0);
  }

  public boolean contains(Line3D L) {
    return contains(L.A) && contains(L.B);
  }

  public double dist(Point3D P) {
    return Math.abs(P.dot(N) - A.dot(N));
  }

  public int leftOrRight(Point3D P) {
    double lambda = P.dot(N) - A.dot(N);
    if(lambda > 0.0) return 1;
    else if(lambda < 0.0) return -1;
    else return 0;
  }
```

Metod S.intersects(L) utvrđuje da li ravan *S* i prava *L* imaju tačno jednu tačku preseka. Ukoliko je to ispunjeno, metod S.intersection(L) određuje tu tačku preseka.

```
public boolean intersects(Line3D L) {
  return !MyMath.approxEqual(L.B.minus(L.A).dot(N), 0.0);
}

public Point3D intersection(Line3D L) {
  double t = A.minus(L.A).dot(N) / L.B.minus(L.A).dot(N);
  return new Point3D(L.A.x + t * (L.B.x - L.A.x),
                     L.A.y + t * (L.B.y - L.A.y),
                     L.A.z + t * (L.B.z - L.A.z));

}
```

Metod S.intersects(P) utvrđuje da li se ravni *S* i *P* seku po pravoj. Ukoliko je to ispunjeno, metod S.intersection(P) određuje tu pravu preseka.

```
public boolean intersects(Plane3D P) {
  return !MyMath.approxEqual(N.cross(P.N).length(), 0.0);
}

public Line3D intersection(Plane3D P) {
  // jednacine ove dve ravni su
  // A1 x + B1 y + C1 z = D1
  // A2 x + B2 y + C2 z = D2
  double A1 = N.x; double B1 = N.y; double C1 = N.z; double D1 = A.dot(N);
  double A2 = P.N.x; double B2 = P.N.y; double C2 = P.N.z; double D2 = P.A.dot(P.N);
  // racunamo jednu tacku preseka ove dve ravni
  // ta tacka pripada presecnoj pravoj
  double x = 0.0, y = 0.0, z = 0.0;
  double S1 = MyMath.det2(A1, B1, A2, B2);
  double S2 = MyMath.det2(A1, C1, A2, C2);
  double S3 = MyMath.det2(B1, C1, B2, C2);
  if(S1 != 0.0) {
    x = MyMath.det2(D1, B1, D2, B2) / S1;
    y = MyMath.det2(A1, D1, A2, D2) / S1;
  }
  else if(S2 != 0.0) {
    x = MyMath.det2(D1, C1, D2, C2) / S2;
    z = MyMath.det2(A1, D1, A2, D2) / S2;
  }
  else if(S3 != 0.0) {
    y = MyMath.det2(D1, C1, D2, C2) / S3;
    z = MyMath.det2(B1, D1, B2, D2) / S3;
  }
  else {
    System.out.println("Plane3D: intersection: planes do not intersect in a line");
    System.exit(0);
  }
```

```
    Point3D Q = new Point3D(x, y, z);

    // vektor pravca presecne prave i druga tacka na pravoj
    Point3D V = P.N.cross(N);
    Point3D R = Q.plus(V);

    return new Line3D(Q, R);
  }
```

Slede implementacije metoda koji transformišu ravan.

```
  public void translate(Point3D P) { A.translate(P); }

  public void reflect(Point3D P) { A.reflect(P); N.opposite(); }

  public void mirror(Plane3D P) {
    Point3D B = A.plus(N);
    A.mirror(P); B.mirror(P);
    N = B.minus(A);
  }

  public void rotX(double phi) {
    Point3D B = A.plus(N);
    A.rotX(phi); B.rotX(phi);
    N = B.minus(A);
  }

  public void rotY(double phi) {
    Point3D B = A.plus(N);
    A.rotY(phi); B.rotY(phi);
    N = B.minus(A);
  }

  public void rotZ(double phi) {
    Point3D B = A.plus(N);
    A.rotZ(phi); B.rotZ(phi);
    N = B.minus(A);
  }

  public void scale(Point3D P, double coeff) {
    A.scale(P, coeff);
    if(coeff < 0.0) N.opposite();
  }

  public void apply(Affine3D T) {
    Point3D B = A.plus(N);
    A.apply(T); B.apply(T);
    N = B.minus(A);
  }
```

Klasu završavamo metodima koji implementiraju paralelno projektovanje i centralno projektovanje. Metod S.pproj(V, P) računa projekciju tačke P na ravan S

u pravcu vektora V, dok metod S.cproj(C, P) računa projekciju tačke P na ravan S iz tačke C.

```
  public Point3D pproj(Point3D V, Point3D P) {
    double h = N.dot(V);
    if(h == 0.0)
      return null; // projekcija ne postoji
    else {
      double t = (N.dot(A) - N.dot(P)) / h;
      double xs = P.x + t*V.x;
      double ys = P.y + t*V.y;
      double zs = P.z + t*V.z;
      return new Point3D(xs, ys, zs);
    }
  }

  public Point3D cproj(Point3D cen, Point3D P) {
    double h = P.minus(cen).dot(N);
    if(h == 0.0)
      return null; // projekcija ne postoji
    else {
      double t = (N.dot(A) - N.dot(cen)) / h;
      double xs = cen.x + t*(P.x - cen.x);
      double ys = cen.y + t*(P.y - cen.y);
      double zs = cen.z + t*(P.z - cen.z);
      return new Point3D(xs, ys, zs);
    }
  }
}
```

3.9 Zadaci

1. Popuniti sledeću tablicu:

$\times$	$\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{j}$	$\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{i}$			
$\overrightarrow{j}$			
$\overrightarrow{k}$			

2. Neka su $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ vektori. Dokazati da je $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\times(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) = -2(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})$.
3. Neka je $\overrightarrow{u} = (3,0,-1)$, $\overrightarrow{v} = (2,4,3)$ i $\overrightarrow{w} = (-1,3,2)$. Izračunati $\overrightarrow{u}\times(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})$ i $(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{w}$.
4. Date su tačke $A(1,1,0)$, $B(5,-4,0)$ i $C(-3,10,-3)$. Izračunati visinu trougla ABC povučenu iz temena B.
5. Dati su vektori $\overrightarrow{a} = (2,-3,1)$, $\overrightarrow{b} = (1,-2,3)$ i $\overrightarrow{c} = (1,2,-7)$. Odrediti vektor $\overrightarrow{x}$ koji je normalan na $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$, i za koga je $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{c} = 10$.

6. Ako je $|\vec{u}| = 10$, $|\vec{v}| = 2$ i $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$, naći $|\vec{u} \times \vec{v}|$.
7. Vektori $\vec{u}$ i $\vec{v}$ su uzajamno normalni. Naći $|(3\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} - 2\vec{v})|$.
8. Vektori $\vec{u}$ i $\vec{v}$ su takvi da je $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 5$ i zaklapaju ugao $\pi/4$. Ako je $\overrightarrow{OA} = \vec{u} - 2\vec{v}$ i $\overrightarrow{OB} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$, naći površinu trougla OAB.
9. Naći jedinični vektor $\vec{x}$ koji zadovoljava jednačinu $\vec{x} \times \vec{i} = \frac{2}{3}(\vec{j} + \vec{k})$.
10. Dokazati da je $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 \leqslant |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2$. Kada važi znak jednakosti?
11. Vektori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ su takvi da je $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \times \vec{x}$ i $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{v} \times \vec{x}$. Dokazati da su vektori $\vec{u} - \vec{x}$ i $\vec{v} - \vec{w}$ kolinearni.
12. Vektori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ su takvi da je $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$. Dokazati da je $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{w} \times \vec{u}$.
13. Vektori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ su takvi da je $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ i $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{0}$. Dokazati da je $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.
14. Neka su $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nekolinearni vektori. Dokazati da je $\vec{u} \perp \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v})$.
15. Dokazati da je $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$.
16. Dokazati da je $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$.
17. Neka su $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jedinični vektori takvi da $\vec{u}$ i $\vec{v}$ zaklapaju ugao α, i da $\vec{w}$ i $\vec{u} \times \vec{v}$ zaklapaju ugao α. Dokazati da je $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$.
18. Vektori $\vec{x}$ i $\vec{y}$ zaklapaju ugao od $3\pi/4$ i pri tome je $|\vec{x}| = \frac{1}{2}$, a $|\vec{y}| = 2$. Dokazati da vektori $3\vec{x} + 5\vec{y}$, $\vec{x} - 2\vec{y}$ i $2\vec{x} + 7\vec{y}$ pripadaju istoj ravni.
19. Dokazati: vektori $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ pripadaju istoj ravni ako i samo ako $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] + [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$.
20. Dokazati da je $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| \leqslant |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$. Kada važi jednakost?
21. Dokazati: $[\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{w} + \vec{u}] = 2[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.
22. Dokazati: $[\vec{x} + \vec{y}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{y}, \vec{v}, \vec{w}]$; $[\alpha\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.
23. Odrediti jednačinu one ravni koja seče x-osu u tački 6, y-osu u tački -12, a z-osu u tački 4.
24. Odrediti jednačinu ravni ako se zna da je tačka $(3, 4, -2)$ normalna projekcija koordinatnog početka na tu ravan.
25. Naći jednačinu ravni koja sadrži tačku $(3, -2, 7)$, a na koordinatnim osama odseca duži iste dužine.
26. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačke $(4, 0, 5)$ i $(0, -1, 2)$ i normalna je na ravan $3x - 2y + 11z - 1 = 0$.
27. Naći tačku na x-osi koja je jednako udaljena od ravni $x - 2y + z = 4$ i $x - 2y + 12z = 0$.
28. Pokazati da sledećih šest ravni

$$\begin{aligned}
&2x + 10y - 11z = -6\\
&28x - 10y - 4z = 11\\
&8x + 40y - 44z = 15\\
&3x + 6y + 6z = -1\\
&14x - 5y - 2z = -3\\
&x + 2y + 2z = 5
\end{aligned}$$

obrazuju pravougli paralelepiped i da je koordinatni početak unutar tog paralelepipeda.

29. Odrediti realan broj p tako da prava AB, gde je $A(4,12,p)$ i $B(0,1,7)$, bude paralelna ravni $3x-2y+z=12$.

30. Naći jednačinu ravni koja polovi oštar ugao između ravni $3x-2y+8z-1=0$ i $-4x+y-z+2=0$.

31. Odrediti četvorke tačaka koje pripadaju istoj ravni:

$$
\begin{array}{ll}
a) & A(0,2,-4),\ B(5,1,2),\ C(3,8,3),\ D(2,-2,1);\\
b) & A(0,-2,0),\ B(-5,0,0),\ C(1,-3,-1),\ D(-6,1,1);\\
c) & A(0,0,1),\ B(3,-2,0),\ C(4,6,-9),\ D(-1,0,2).
\end{array}
$$

32. Odrediti presečnu tačku sledeće tri ravni: $2x-5y+z=8$, $x+2z=-2$, $3x+4y=3$.

33. Prava l_0 sadrži tačku $M_0(p_0,q_0,r_0)$ i paralelna je vektoru $\overrightarrow{p_0}=(a_0,b_0,c_0)$, a prava l_1 sadrži tačku $M_1(p_1,q_1,r_1)$ i paralelna je vektoru $\overrightarrow{p_1}=(a_1,b_1,c_1)$. Dokazati: prave l_0 i l_1 su mimoilazne ako i samo ako je

$$
\begin{vmatrix}
p_1-p_0 & q_1-q_0 & r_1-r_0\\
a_0 & b_0 & c_0\\
a_1 & b_1 & c_1
\end{vmatrix} \neq 0.
$$

(Uputstvo: razmotriti koplanarnost vektora $\overrightarrow{p_0}$, $\overrightarrow{p_1}$ i $\overrightarrow{M_0M_1}$.)

34. Odrediti projekciju prave $x=1+t, y=1+2t, z=2-t$ na ravan $x-2y+z-2=0$.

35. Odrediti ravan koja sadrži tačku $(-3,0,4)$ i paralelna je sa svakom od pravih $l_0: x=-2+5t, y=3+6t, z=7t$ i $l_1: x=-1+2t, y=-2+3t, z=9+6t$.

36. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačku $(1,-3,2)$ i pravu $x=1+5t$, $y=-3+t$, $z=2t$.

37. Naći jednačinu ravni koja sadrži pravu $l_0: x=2t,\ y=-t,\ z=1+2t$ i paralelna je pravoj $l_1: x=1, y=t, z=-t$.

38. Odrediti pravu koja sadrži tačku $(4,0,-1)$ i seče prave $l_0: x=1+2t, y=-3+4t$, $z=5+3t$ i $l_1: x=5t, y=2-t, z=-1+2t$.

39. Odrediti pravu koja je paralelna vektoru $\overrightarrow{v}=(8,7,1)$ i seče svaku od pravih l_0 : $x=-3+2t, y=5+3t, z=t$ i $l_1: x=10+5t, y=-7+4t, z=t$.

40. Odrediti ugao između prave $x=-1+3t$, $y=1$, $z=9+10t$ i ravni $3x+15y-2z+1=0$.

41. Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku $(2,-3,4)$ i normalna je na prave l_0 : $x=-3+2t, y=5+3t, z=t$ i $l_1: x=10+5t, y=-7+4t, z=t$.

42. Odrediti jednačinu normale iz tačke $(1,2,3)$ na pravu $x=2+3t$, $y=-4t$, $z=-1+2t$.

43. Odrediti rastojanje pravih $l_0: x=-1+8t,\ y=-1+t,\ z=1+t$ i $l_1: x=-1-t$, $y=1+2t, z=-1+4t$.

44. Odrediti projekciju tačke $(3,2,1)$ na pravu $x=2+t, y=-3+t, z=2t$.

45. Odrediti tačku simetričnu tački $(2,7,1)$ u odnosu na ravan $x-4y+z+7=0$.

46. Odrediti tačku simetričnu tački $(4,3,10)$ u odnosu na pravu $x = 1+2t$, $y = 2+4t$, $z = 3+5t$.

47. Date su tačke $A(-4,-1,2)$ i $B(3,5,-16)$. Odrediti tačku C tako da središte duži $[AC]$ pripada y-osi, a da središte duži $[BC]$ pripada xz-ravni.

48. Date su tačke $A(1,0,-3)$ i $B(2,2,7)$. Odrediti tačku C tako da težište trougla ABC pripada pravoj $x = 1-t, y = 2+t, z = -3+2t$, a da tačka C pripada ravni $x-y-z = 0$.

49. Tačke $A(1,2,3)$, $B(0,-2,4)$, $C(2,1,0)$, $D(1,-4,3)$ su temena tetraedra $ABCD$.

- Odrediti visinu (kao broj) ovog tetraedra koja odgovara temenu B.
- Odrediti jednačinu prave kojoj pripada visina iz temena A.
- Odrediti zapreminu tetraedra.
- Odrediti pravu kojoj pripada težišna duž iz temena C.
- Odrediti nagib strane ABC prema strani ABD.
- Odrediti visinu (kao broj) strane BCD.
- Odrediti pravu kojoj pripada visina strane ACD.
- Odrediti rastojanje prave AB od prave CD.

50. Ako je $\Sigma_s(A) = B$, onda središte duži $[AB]$ pripada pravoj s i $AB \perp s$. Dokazati.

51. Dokazati da je množenje kvaterniona asocijativno. (Uputstvo: koristiti neki sistem za računarsku algebru kao što je *Maple* ili *Mathematica*.)

52. Dokazati da se interpretacija rotacije u ravni preko kompleksnih brojeva može dobiti kao specijalan slučaj interpretacije rotacije u prostoru preko kvaterniona. (Uputstvo: Zarotirati tačku $A(x,y,0)$ oko z-ose za ugao θ; kvaternion tačke A je $ix + jy$, a kvaternion rotacije je $\cos(\theta/2) + k\sin(\theta/2)$.)

53. Kvaternion $s + ia + jb + kc$ možemo da shvatimo i kao uređeni par $(s, \overrightarrow{v})$, gde je $\overrightarrow{v} = (a,b,c)$ vektor u prostoru. Interpretirati operacije sa kvaternionima (suprotni kvaternion, dužina kvaterniona, konjugovani kvaternion, zbir kvaterniona, proizvod kvaterniona, inverzni kvaternion) koristeći se jezikom vektorske algebre (sabiranje i oduzimanje vektora, množenje vektora brojem, skalani i vektorski proizvod vektora, itd).

4 Krive drugog reda u ravni

Kriva drugog reda u ravni je skup $\mathscr{C}$ svih tačaka ravni koje zadovoljavaju jednačinu oblika $Ax^2 + Mxy + By^2 + Cx + Dy + E = 0$:

$$\mathscr{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : Ax^2 + Mxy + By^2 + Cx + Dy + E = 0\}.$$

Za krivu $\mathscr{C}$ kažemo da je drugog reda zato što je opisana kvadratnim polinomom.

U ovoj glavi ćemo upoznati i detaljno ispitati osnovne tipove krivih drugog reda u ravni (krug, elipsu, hiperbolu i parabolu), a potom ćemo izvršiti klasifikaciju krivih drugog reda u ravni i pokazati da su, osim nekoliko degenerisanih slučajeva, prethodnim spiskom obuhvaćene sve netrivijalne mogućnosti. Na kraju glave ćemo pokazati zašto se krive drugog reda u ravni zovu još i *konusni preseci*.

Ključni element u razmatranjima koja slede je rezultat (koga dokazujemo u odeljku 4.5 ove glave, Teorema 78) da se svaka kriva drugog reda u ravni može pogodno odabranom rotacijom svesti na krivu drugog reda u čijoj jednačini ne učestvuje sabirak oblika Mxy. To je razlog što u odeljcima u kojima razmatramo jednačine kruga, elipse, hiperbole i parabole posmatramo uvek „uprošćene” jednačine krive drugog reda koje imaju oblik $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$.

Algoritamsko rezonovanje u vezi sa krivim drugog reda predstavlja jedan od ozbiljnih problema savremenog računarstva i zato ćemo glavu završiti implementacijom koja operacionalizuje samo one teorijske koncepte koji se odnose na krug u vidu klase Circle2D.

4.1 Krug

Neka je $C(a,b)$ tačka u ravni i neka je $r > 0$ realan broj. *Krug sa centrom C i poluprečnikom r* je skup svih tačaka $X(x,y)$ u ravni koje su na rastojanju r od tačke C:

$$d(X,C) = r.$$

Tako dobijamo da koordinate tačke X moraju zadovoljavati sledeće:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r,$$

odnosno, nakon kvadriranja (iz čisto estetskih razloga),

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Ova jednačina se zove *jednačina kruga* zato što neka tačka pripada krugu ako i samo ako njene koordinate zadovoljavaju jednačinu. Za ovakvu jednačinu kažemo da je *u implicitnom obliku* zato što nije „rešena po nekoj koordinati”. Posebno, jednačina kruga sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnika r ima jednačinu:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Unutrašnjost kruga sa centrom C i poluprečnikom r je skup tačaka X takvih da je $d(C,X) < r$, a *spoljašnjost kruga* je skup tačaka X za koje je $d(C,X) > r$. Odatle se lako dobija da tačka pripada unutrašnjosti kruga ako njene koordinate zadovoljavaju nejednačinu $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$, a spoljašnjosti ako zadovoljavaju nejednačinu $(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$.

Teorema 49. *Neka je $A = B \neq 0$ i neka je $\mathscr{K}$ skup tačaka u ravni čije koordinate zadovoljavaju jednačinu $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$. Tada je $\mathscr{K}$ prazan skup, ili se sastoji samo od jedne tačke, ili predstavlja krug.*

Dokaz. Dopunjavanjem do kvadrata dobijamo da se polinom $Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dy + E = 0$ može na drugi način zapisati ovako:

$$A\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + A\left(y + \frac{D}{2A}\right)^2 = \Delta,$$

gde smo koristili da je $A = B$ i gde smo stavili $\Delta = \frac{C^2+D^2}{4A} - E$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $A > 0$. Ako je $\Delta < 0$ tada ne postoji nijedan par realnih brojeva (x,y) koji bi zadovoljavao ovu jednačinu, pa je $\mathscr{K} = \varnothing$. Ako je $\Delta = 0$ tada gornja jednačina ima tačno jedno rešenje $x = -\frac{C}{2A}$, $y = -\frac{D}{2A}$ i tada je $|\mathscr{K}| = 1$. Konačno, ako je $\Delta > 0$ onda se prethodna jednačina može zapisati i ovako:

$$\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{D}{2A}\right)^2 = \frac{\Delta}{A},$$

odakle se lako vidi da se radi o krugu sa centrom u tački $(-\frac{C}{2A}, -\frac{D}{2A})$ i poluprečnikom $\sqrt{\Delta/A}$. ■

Primer. Odrediti centar i poluprečnik kruga $4x^2 + 4y^2 + 8x - 56y - 200 = 0$.

Rešenje. Dopunjavanjem do kvadrata lako se dobija da je ova jednačina ekvivalentna sa $(x+1)^2 + (y-7)^2 = 100$. Prema tome, radi se o krugu sa centrom u tački $(-1,7)$ i poluprečnikom 10. □

Teorema 50. *Neka su $K(p_1,q_1)$, $L(p_2,q_2)$ i $M(p_3,q_3)$ tri nekolinearne tačke. Jednačina kruga koji je određen ovim tačkama data je sa:*

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ p_1^2+q_1^2 & p_1 & q_1 & 1 \\ p_2^2+q_2^2 & p_2 & q_2 & 1 \\ p_3^2+q_3^2 & p_3 & q_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dokaz. Razvojem ove determinante po elementima prve vrste dobijamo jednačinu oblika $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$, gde je

$$A = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \\ p_3 & q_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Jasno je da svaka od tačaka K, L i M zadovoljava ovu jednačinu jer se uvrštavanjem koordinata svake od njih dobija determinanta koja ima dve jednake vrste. Primetimo još i da je $A \neq 0$ jer su tačke K, L i M nekolinearne (Posledica 26). Prema Teoremi 49, skup tačaka koje zadovoljavaju ovu jednačinu je ili prazan, ili se sastoji od tačno jedne tačke, ili se radi o tačkama nekog kruga. Kako ovu jednačinu zadovoljavaju tri različite tačke K, L, M zaključujemo da se radi o jednačini kruga. ■

Prava i krug. Prava i krug mogu da se nalaze u jednom od sledeća tri odnosa: prava ili seče krug u dve tačke, ili ga dodiruje, ili sa njim nema zajedničkih tačaka. U prvom slučaju za pravu kažemo da je *sečica kruga*, a u drugom da je *tangenta kruga*. Na jednom primeru ćemo pokazati kako se analitički utvrđuje u kom odnosu se nalaze data prava i dati krug.

Neka je $y = kx + n$ jednačina date prave i neka je $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ jednačina kruga. Uvrštavanjem jednačine prave u jednačinu kruga dobijamo

$$(x-a)^2 + (kx+n-b)^2 = r^2$$

čija rešenja po x predstavljaju x-koordinate presečnih tačaka prave i kruga. Nakon kvadriranja i sređivanja izraza dobija se sledeća kvadratna jednačina:

$$(1+k^2)x^2 + 2(k(n-b)-a)x + (a^2+(n-b)^2-r^2) = 0.$$

Sada je jasno da priroda rešenja ove kvadratne jednačine određuje odnos prave i kruga. Naravno, prirodu rešenja kvadratne jednačine određuje znak njene diskriminante $D = 4(k(n-b)-a)^2 - 4(1+k^2)(a^2+(n-b)^2-r^2)$. Odatle,

- ako je $D > 0$, jednačina ima dva različita realna rešenja, pa se prava i krug seku u dve tačke;
- ako je $D = 0$, jednačina ima jedno dvostruko rešenje, pa se prava i krug dodiruju;
- ako $D < 0$, jednačina nema realnih rešenja, pa prava i krug nemaju presečnih tačaka.

Primer. Odrediti odnos kruga $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ i prave $y = 2x-1$.

Rešenje. Potražimo presek ova dva objekta. Uvrštavanjem izraza za y u jednačinu kruga dobijamo $(x-2)^2 + (2x-1-3)^2 = 5$, odnosno, nakon sređivanja, $x^2 - 4x + 3 = 0$. Kako je diskriminanta ove kvadratne jednačine $D = 4 > 0$, prava i krug imaju dve zajedničke tačke. □

Primer. Odrediti odnos kruga $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ i prave $x=1+t$, $y=1-t$, $t\in\mathbb{R}$.

Rešenje. Uvrštavanjem izraza za x i y u jednačinu kruga dobijamo sledeću kvadratnu jednačinu $t^2+(2-t)^2=2$ koja je ekvivalentna sa $t^2-2t+1=0$. Kako je diskriminanta ove kvadratne jednačine jednaka nuli, zaključujemo da prava dodiruje krug. □.

Primer. Odrediti jednačinu tangente iz tačke $P(6,5)$ na krug $(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

Rešenje. Tačka P pripada spoljašnjosti kruga, što se lako proverava, na osnovu čega postoje dve tangente. Potražimo tangente na krug u obliku $y=kx+n$. Kako tangente prolaze kroz tačku P, mora biti $n=5-6k$, odnosno, tangente imaju oblik $y=kx-6k+5$. Nakon uvrštavanja jednačine tangente u jednačinu kruga i sređivanja, dobijamo:

$$(1+k^2)x^2-2x(6k^2-3k+2)+9(4k^2-4k+1)=0.$$

Kako je prava koju tražimo tangenta kruga, prethodna kvadratna jednačina treba da ima jedno dvostruko rešenje, odnosno, njena diskriminanta treba da bude jednaka nuli. Zato treba da važi:

$$4(6k^2-3k+2)^2-36(1+k^2)(4k^2-4k+1)=0.$$

Nakon kvadriranja i sređivanja dobijamo kvadratnu jednačinu po k:

$$12k^2-24k+5=0,$$

čija rešenja su $k_{1,2}=1\pm\sqrt{7/12}$. Prema tome, jednačine tangenti su $y=(1+\sqrt{7/12})(x-6)+5$ i $y=(1-\sqrt{7/12})(x-6)+5$. □

Za kraj pogledajmo još potreban i dovoljan uslov da prava dodiruje krug, kao i oblik prave koja dodiruje krug u njegovoj unapred određenoj tački.

Teorema 51. *Prava $y=kx+n$ dodiruje krug $x^2+y^2=r^2$ ako i samo ako je $(1+k^2)r^2=n^2$.*

Dokaz. Uvrštavanjem linearne jednačine u kvadratnu dobijamo

$$x^2+(kx+n)^2=r^2,$$

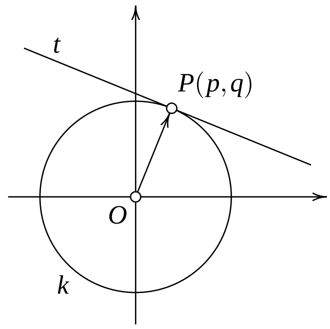
odnosno, nakon sređivanja,

$$(1+k^2)x^2+2knx+(n^2-r^2)=0.$$

Prava i krug se dodiruju ako i samo ako prethodna jednačina ima jedno dvostruko rešenje, odnosno, ako i samo ako se njena diskriminanta anulira:

$$4k^2n^2-4(1+k^2)(n^2-r^2)=0,$$

što je ekvivalentno sa $(1+k^2)r^2 = n^2$. ■

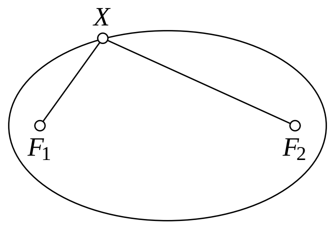


Teorema 52. *Neka je $P(p,q)$ tačka na krugu $k : x^2+y^2 = r^2$. Tada tangenta na krug k u tački P ima jednačinu $px+qy = r^2$.*

Dokaz. Tangenta na krug k u tački P prolazi kroz tačku P i normalna je na vektor $\overrightarrow{OP}$. Prema tome, njena jednačina glasi $p(x-p)+q(y-q) = 0$, odnosno, nakon sređivanja, $px+qy = p^2+q^2$. No, $p^2+q^2 = r^2$ jer tačka P pripada krugu k. ■

4.2 Elipsa

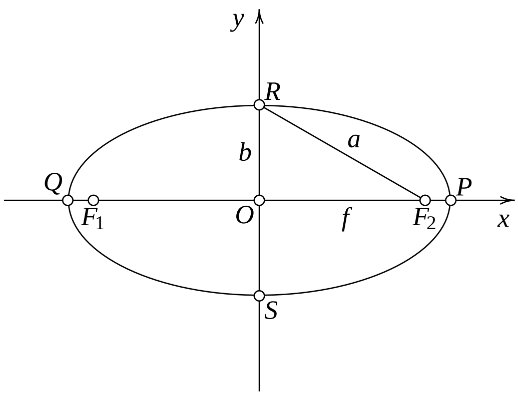
Neka su F_1 i F_2 tačke i neka je $a > 0$ realan broj takav da je $2a > d(F_1,F_2)$. *Elipsa sa fokusima F_1, F_2 i poluosom a* je skup svih tačaka X u ravni čiji zbir rastojanja od tačaka F_1 i F_2 je jednak $2a$:



$$d(X,F_1)+d(X,F_2) = 2a.$$

Za tačku Y ravni za koju je $d(Y,F_1)+d(Y,F_2) < 2a$ kažemo da je *unutrašnja* tačka elipse, dok za tačku Z ravni za koju je $d(Z,F_1)+d(Z,F_2) > 2a$ kažemo da je *spoljašnja* tačka elipse.

Ako postavimo koordinatni sistem tako da tačke F_1 i F_2 imaju koordinate $(-f,0)$ i $(f,0)$, redom, za neko $f > 0$:



i ako uvedemo oznaku $b = \sqrt{a^2-f^2}$, lako se proverava da sledeće tačke pripadaju elipsi: $P(a,0)$, $Q(-a,0)$, $R(0,b)$, $S(0,-b)$. Ove četiri tačke se zovu *temena elipse*, a brojevi a i b *poluose elipse*. Tačka O, središte duži $[F_1F_2]$, se zove *centar elipse*.

Teorema 53 (Centralna jednačina elipse). *Neka je $\mathscr{E}$ elipsa sa centrom u koordinatnom početku, sa poluosom a na x-osi i poluosom b na y-osi. Tačka (x,y) pripada elipsi $\mathscr{E}$ ako i samo ako je*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tačka (x,y) pripada unutrašnjosti elipse $\mathscr{E}$ ako i samo ako je

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1,$$

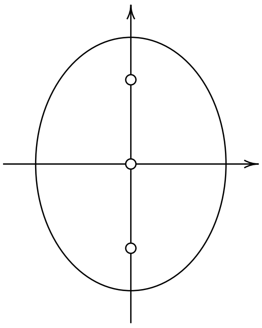
a pripada spoljašnjosti elipse $\mathscr{E}$ ako i samo ako je

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1.$$

Dokaz. Neka je $X(x,y)$ proizvoljna tačka elipse. Onda je $d(X,F_1)+d(X,F_2)=2a$, odnosno $\sqrt{(x+f)^2+y^2}+\sqrt{(x-f)^2+y^2}=2a$. Nakon kvadriranja i sređivanja dobijamo $\sqrt{((x+f)^2+y^2)((x-f)^2+y^2)}=2a^2-x^2-y^2-f^2$, a nakon još jednog kvadriranja i sređivanja dobijamo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Na isti način dobijamo sledeće: ako je tačka (x,y) unutrašnja tačka elipse onda je $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$, a ako se radi o spoljašnjoj tački onda je $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1$. Time su jednim potezom pokazane sve tri ekvivalencije. ■

Ukoliko centar elipse nije u koordinatnom početku, već u tački (p,q) jednačina elipse čije ose su paralelne koordinatnim osama dobija sledeći oblik:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1.$$



elipsa za $a<b$

Takođe, lako se zaključuje da je tačka (x,y) unutrašnja tačka ove elipse ako i samo ako je $\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}<1$, odnosno, da se radi o spoljašnjoj tački ako i samo ako je $\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}>1$.

Primetimo da ukoliko je $a>b$, onda se fokusi elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ nalaze na x-osi. Ali, ako je $a<b$, onda se fokusi elipse nalaze na y-osi. Naravno, ukoliko je $a=b$, jednačina elipse postaje jednačina kruga sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnikom a.

Primer. Odrediti centar i poluose elipse $4x^2+9y^2+8x-54y+49=0$.

Rešenje. Dopunjavanjem do kvadrata lako se dobija da je ova jednačina ekvivalentna sa $4(x+1)^2+9(y-3)^2-36=0$, odnosno, nakon deljenja sa 36:

$$\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1.$$

Prema tome, radi se o elipsi čiji centar je u tački $(-1,3)$ i čije poluose su 3 i 2. □

Odnos prave i elipse. Kao i kod kruga, prava i elipsa mogu da se nalaze u jednom od sledeća tri odnosa: prava ili seče elipsu u dve tačke, ili je dodiruje, ili sa njom nema zajedničkih tačaka. U prvom slučaju za pravu kažemo da je *sečica elipse*, a u drugom da je *tangenta elipse*. Odnos prave i elipse se analitički utvrđuje na isti način kao što je to bio slučaj kod kruga. Pogledajmo zato samo jedan primer.

Primer. Odrediti tangente na elipsu $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ iz tačke $(0,4)$.

Rešenje. Nakon množenja sa 36, jednačina elipse se može zapisati u sledećem, ekvivalentnom, obliku:

$$4x^2+9y^2-36=0.$$

Tangenta koju tražimo ima oblik $y=kx+4$ zato što prolazi kroz tačku $(0,4)$. Uvrstimo ovaj oblik jednačine tangente u jednačinu elipse i nakon sređivanja dobijamo

$$(9k^2+4)x^2+72kx+108=0.$$

Priroda rešenja ove kvadratne jednačine određuje odnos prave i elipse (n rešenja = n presečnih tačaka). Nama su potrebne tangente na elipsu, pa gornja kvadratna jednačina treba da ima samo jedno rešenje. Odatle dobijamo da njena diskriminanta mora biti jednaka nuli:

$$12k^2-(9k^2+4)=0,$$

pa je $k_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ i $k_2=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Tražene tangente tako imaju jednačine $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x+4$ i $y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+4$. $\square$

Teorema 54. *Prava $y=kx+n$ dodiruje elipsu $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ako i samo ako je $a^2k^2+b^2=n^2$.*

Dokaz. Nakon uvrštavanja linearne jednačine u kvadratnu i nakon množenja sa a^2b^2 dobijamo

$$b^2x^2+a^2(kx+n)^2=a^2b^2,$$

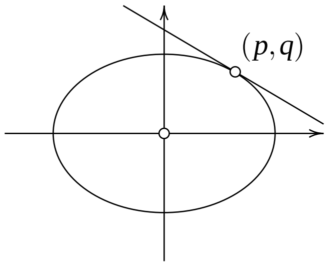
odnosno, nakon sređivanja,

$$(b^2+a^2k^2)x^2+2kna^2x+a^2(n^2-b^2)=0.$$

Prava i elipsa se dodiruju ako i samo ako prethodna jednačina ima jedno dvostruko rešenje, odnosno, ako i samo ako se njena diskriminanta anulira:

$$4k^2n^2a^4-4a^2(n^2-b^2)(b^2+a^2k^2)=0,$$

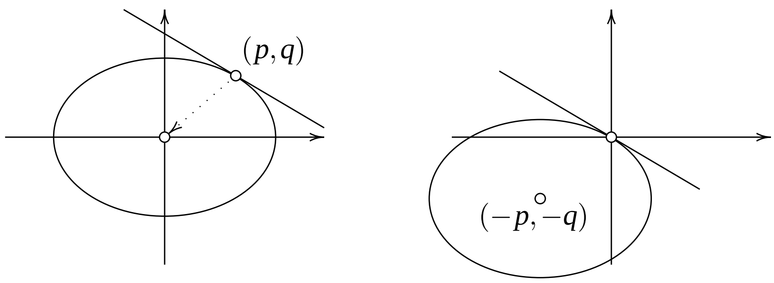
što je ekvivalentno sa $a^2k^2+b^2=n^2$. $\blacksquare$



Tangenta na elipsu u njenoj tački (p,q)**.** Izvešćemo sada jednačinu tangente na elipsu u njenoj tački (p,q). U prvom koraku ćemo samo izračunati koeficijent pravca tangente, a potom ćemo taj podatak upotrebiti za određivanje jednačine tangente.

Teorema 55. *Neka je* (p,q) *tačka na elipsi* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *takva da je* $q\neq 0$. *Tada tangenta na elipsu u tački* (p,q) *ima koeficijent pravca* $-\frac{pb^2}{qa^2}$.

Dokaz. Zato što tačka (p,q) leži na elipsi znamo da za brojeve p i q važi sledeće: $b^2p^2+a^2q^2=a^2b^2$. Da bismo pojednostavili račun, transliraćemo celu situaciju za vektor $(-p,-q)$ (Sl. 4.1). Tako dobijamo novu elipsu čiji centar je u tački $(-p,-q)$, i njenu tangentu koja je dodiruje u tački $(0,0)$. Jasno je da tangenta u novonastaloj situaciji ima isti koeficijent pravca kao i tangenta u originalnoj postavci problema.



Slika 4.1: Tangenta na elipsu u njenoj tački

Posmatrajmo sada novonastalu situaciju. Jednačina ove elipse je

$$\frac{(x+p)^2}{a^2}+\frac{(y+q)^2}{b^2}=1,$$

dok jednačina tangente, očito, ima oblik $y=kx$. Treba da nađemo ono k za koje elipsa i tangenta imaju samo jednu zajedničku tačku. Nakon uvrštavanja linearne jednačine u kvadratnu i množenja sa a^2b^2 dobijamo sledeću jednačinu po x:

$$b^2(x+p)^2+a^2(kx+q)^2=a^2b^2,$$

odnosno, nakon sređivanja izraza:

$$(b^2+k^2a^2)x^2+2(pb^2+kqa^2)x+(b^2p^2+a^2q^2-a^2b^2)=0.$$

Kako je $b^2p^2+a^2q^2=a^2b^2$, jednačina postaje:

$$(b^2+k^2a^2)x^2+2(pb^2+kqa^2)x=0.$$

Poslednja jednačina ima jedinstveno rešenje $x=0$ ako i samo ako je $pb^2+kqa^2=0$, odakle se rešavanjem po k dobija $k=-\frac{pb^2}{qa^2}$. ■

Teorema 56. *Tangenta na elipsu* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *u njenoj tački* (p,q) *ima jednačinu* $\frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}=1$.

Dokaz. Ako je $q=0$ onda se radi o temenu elipse na x-osi, tako da je $p=a$ ili $p=-a$. Odgovarajuće tangente tada imaju oblik $x=a$, odnosno, $x=-a$, respektivno, što je u saglasnosti sa tvrđenjem. Pretpostavimo, sada, da je $q\neq 0$. Prema Teoremi 55 koeficijent pravca tangente na elipsu u njenoj tački (p,q) je $k=-\frac{pb^2}{qa^2}$, tako da jednačina tangente glasi $y-q=-\frac{pb^2}{qa^2}(x-p)$, odakle se sređivanjem dobija $pb^2x+qa^2y=p^2b^2+q^2a^2$. Kako tačka (p,q) leži na elipsi, znamo da je $b^2p^2+a^2q^2=a^2b^2$. Dakle, jednačina tangente postaje $pb^2x+qa^2y=a^2b^2$, odnosno, $\frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}=1$ nakon deljenja sa a^2b^2. ■

Reflektivno svojstvo elipse. Da se podsetimo, za figuru $\Phi\subseteq\mathbb{R}^2$ kažemo da je *konveksna* ako za svake dve tačke $A,B\in\Phi$ imamo da je $[AB]\subseteq\Phi$. Dokažimo sada da je figura koju čine elipsa i njena unutrašnjost konveksna figura.

Lema 57. *Neka su* p,q,u,v *realni brojevi takvi da je* $p^2+q^2\leqslant 1$ *i* $u^2+v^2\leqslant 1$. *Tada je* $pu+qv\leqslant 1$.

Dokaz. Očito je $(pv-qu)^2\geqslant 0$, odakle, nakon kvadriranja, dobijamo da je $2pquv\leqslant p^2v^2+q^2u^2$. Sada je

$$\begin{aligned}(pu+qv)^2 &= p^2u^2+q^2v^2+2pquv\\ &\leqslant p^2u^2+q^2v^2+p^2v^2+q^2u^2\\ &= (p^2+q^2)(u^2+v^2)\leqslant 1,\end{aligned}$$

prema pretpostavci. Dakle, $(pu+qv)^2\leqslant 1$, odakle sledi da je $|pu+qv|\leqslant 1$. Konačno, $pu+qv\leqslant|pu+qv|\leqslant 1$. ■

Teorema 58. *Neka je* $\Phi=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$ *figura koju čine tačke elipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *i sve njene unutrašnje tačke. Figura* Φ *je konveksna.*

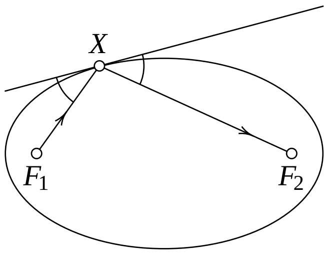
Dokaz. Neka su $A,B\in\Phi$ dve proizvoljne tačke figure Φ i neka je $A=(x_0,y_0)$, $B=(x_1,y_1)$. Da bismo pokazali da je $[AB]\subseteq\Phi$, uzmimo proizvoljnu tačku $C\in[AB]$. Tada postoje brojevi $\lambda,\mu\in[0,1]$ takvi da je $\lambda+\mu=1$ i $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$. Tada je $C=(\lambda x_0+\mu x_1,\lambda y_0+\mu y_1)$. Da bismo pokazali da je $C\in\Phi$ treba da dokažemo da koordinate tačke C zadovoljavaju relaciju $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$. Lako se vidi da je:

$$\frac{(\lambda x_0+\mu x_1)^2}{a^2}+\frac{(\lambda y_0+\mu y_1)^2}{b^2}=\lambda^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)+\mu^2\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)+2\lambda\mu\left(\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}\right).$$

Zbog $A, B \in \Phi$ je $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \leqslant 1$ i $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \leqslant 1$, dok nam Lema 57 garantuje da je $\frac{x_0 x_1}{a^2} + \frac{y_0 y_1}{b^2} \leqslant 1$. Dakle,

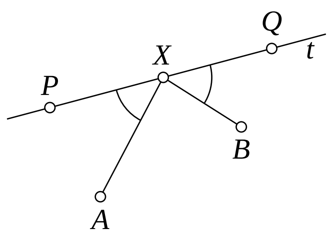
$$\frac{(\lambda x_0 + \mu x_1)^2}{a^2} + \frac{(\lambda y_0 + \mu y_1)^2}{b^2} \leqslant \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu = (\lambda + \mu)^2 = 1.$$

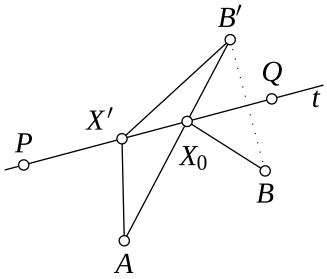
Prema tome, $C \in \Phi$. Time je pokazano da je Φ konveksna figura. ■



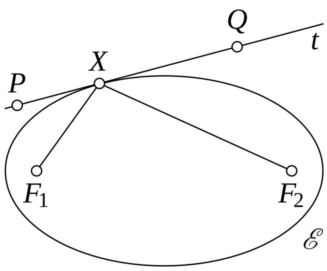
Pretpostavimo da smo iz fokusa F_1 ispalili zrak u proizvoljnom pravcu i neka se on odbio od elipse. Pokažimo da će tada odbijeni zrak pasti u fokus F_2. Drugim rečima, za proizvoljnu tačku X na elipsi, poluprave XF_1 i XF_2 zaklapaju podudarne uglove sa tangentom na elipsu u tački X.

Lema 59. *Neka su A i B tačke sa iste strane prave t i X, P, Q tačke na pravoj t takve da je $(P - X - Q)$. Ako je tačka X prave t uočena tako da je $d(A,X) + d(B,X)$ minimalno, onda je $\angle AXP \cong \angle BXQ$.*





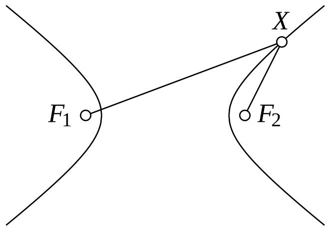
Dokaz. Neka je B' tačka simetrična tački B u odnosu na pravu t i neka je X_0 tačka u kojoj prava AB' seče pravu t. Tada za svaku tačku $X' \in t$ lako vidimo da je $d(A,X') + d(B,X') \geqslant d(A,B') = d(A,X_0) + d(B',X_0) = d(A,X_0) + d(B,X_0)$. Prema tome, za $X \in t$ imamo da je $d(A,X) + d(B,X)$ minimalno ako i samo ako je $X = X_0$. Po konstrukciji tačke X_0 odmah sledi da je $\angle AX_0P \cong \angle BX_0Q$. ■



Teorema 60. *Neka je $\mathscr{E}$ elipsa sa fokusima F_1 i F_2 i neka je t tangenta na elipsu $\mathscr{E}$ koja je dodiruje u tački X. Neka su P i Q tačke prave t takve da je $(P - X - Q)$. Tada je $\angle F_1XP \cong \angle F_2XQ$.*

Dokaz. Pošto je elipsa konveksna figura, sve tačke prave t, osim tačke X, su spoljašnje tačke elipse $\mathscr{E}$. Zato je $d(Y,F_1) + d(Y,F_2) > d(X,F_1) + d(X,F_2)$ za svako $Y \in t$ takvo da je $Y \neq X$. Prema tome, tačka X je tačka prave t koja ima osobinu da je $d(X,F_1) + d(X,F_2)$ minimalno. Odatle, prema Lemi 59, sledi da je $\angle F_1XP \cong \angle F_2XQ$. ■

4.3 Hiperbola

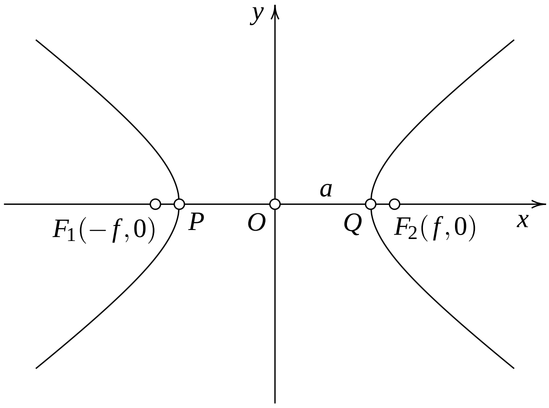


Neka su F_1 i F_2 tačke i neka je $a>0$ realan broj takav da je $2a<d(F_1,F_2)$. *Hiperbola sa fokusima F_1, F_2 i poluosom a* je skup svih tačaka X u ravni čija je razlika rastojanja od tačaka F_1 i F_2 po apsolutnoj vrednosti jednaka $2a$:

$$|d(X,F_1)-d(X,F_2)|=2a.$$

Hiperbola je kriva koja se, zapravno, sastoji „iz dve krive”, kažemo još i da ima *dva kraka*. Jedan krak hiperbole čine tačke za koje je $d(X,F_1)-d(X,F_2)=2a$, a drugi krak tačke za koje je $d(X,F_1)-d(X,F_2)=-2a$.

Ako postavimo koordinatni sistem tako da tačke F_1 i F_2 imaju koordinate $(-f,0)$ i $(f,0)$, redom, za neko $f>0$:



lako se proverava da tačke $P(-a,0)$ i $Q(a,0)$ pripadaju hiperboli. Ove dve tačke se zovu *temena hiperbole*. Tačka O, središte duži $[F_1F_2]$, se zove *centar hiperbole*. Broj a se zove *realna poluosa hiperbole*, dok se broj $b=\sqrt{f^2-a^2}$ zove *imaginarna poluosa hiperbole*.

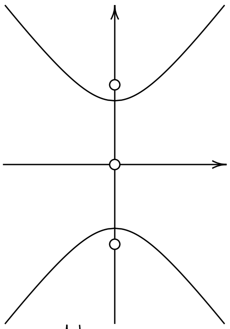
Teorema 61 (Centralna jednačina hiperbole). *Neka je $\mathscr{H}$ hiperbola sa centrom u koordinatnom početku, sa fokusima u tačkama $(-f,0)$ i $(f,0)$, sa realnom poluosom a i imaginarnom poluosom b. Tačka (x,y) pripada hiperboli $\mathscr{H}$ ako i samo ako je*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

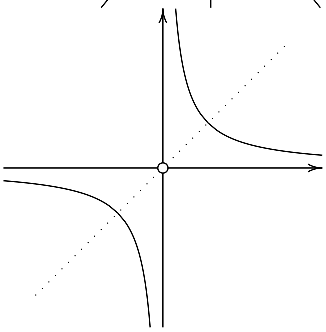
Dokaz. Neka je $X(x,y)$ proizvoljna tačka hiperbole. Onda je $|d(X,F_1)-d(X,F_2)|=2a$, odnosno $\left|\sqrt{(x+f)^2+y^2}-\sqrt{(x-f)^2+y^2}\right|=2a$. Nakon kvadriranja i sređivanja dobijamo $\sqrt{((x+f)^2+y^2)((x-f)^2+y^2)}=x^2+y^2+f^2-2a^2$, a nakon još jednog kvadriranja i sređivanja dobijamo $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Time je dokaz završen. ■

Ukoliko centar hiperbole nije u koordinatnom početku, već u tački (p,q) jednačina hiperbole kod koje je prava određena fokusima paralelna x-osi dobija sledeći oblik:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1.$$



S druge strane, jednačina $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ opisuje hiperbolu čiji fokusi leže na y-osi.



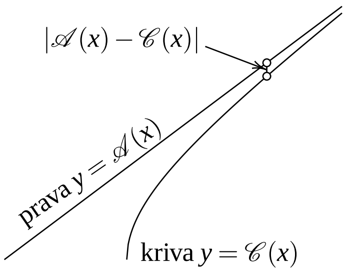
Primer. Pokazati da jednačina $xy = 1$ opisuje hiperbolu čiji fokusi leže na pravoj $y = x$.

Rešenje. Uvedimo u ovu jednačinu smenu promenljivih koja opisuje rotaciju za ugao od $\pi/4$:

$$x = u \cdot \cos(\pi/4) - v \cdot \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v,$$
$$y = u \cdot \sin(\pi/4) + v \cdot \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v,$$

tako da jednačina postaje $\frac{\sqrt{2}}{2}(u-v) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(u+v) = 1$, odnosno, $\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} = 1$. Dakle, rotacijom za $\pi/4$ centralna hiperbola čiju jednačinu (po u i v) smo upravo dobili postaje hiperbola čija jednačina je $xy = 1$, što znači da je jednačinom $xy = 1$ opisana hiperbola čiji fokusi leže na pravoj $y = x$. □

Asimptote hiperbole i geometrijska interpretacija imaginarne poluose. Postoje situacije u kojima se neka kriva „beskonačno približava" nekoj pravoj ali je nikad ne dodirne. Za takvu pravu kažemo da je *asimptota* krive. Preciznije, ako je kriva data jednačinom $y = \mathscr{C}(x)$, a prava jednačinom $y = \mathscr{A}(x)$, onda kažemo da je *prava $\mathscr{A}$ asimptota krive $\mathscr{C}$ kada $x \to +\infty$* ukoliko je zadovoljeno sledeće:



$$\lim_{x\to+\infty} |\mathscr{A}(x) - \mathscr{C}(x)| = 0.$$

Analogno, *prava $\mathscr{A}$ je asimptota krive $\mathscr{C}$ kada $x \to -\infty$* ukoliko je zadovoljeno sledeće:

$$\lim_{x\to-\infty} |\mathscr{A}(x) - \mathscr{C}(x)| = 0.$$

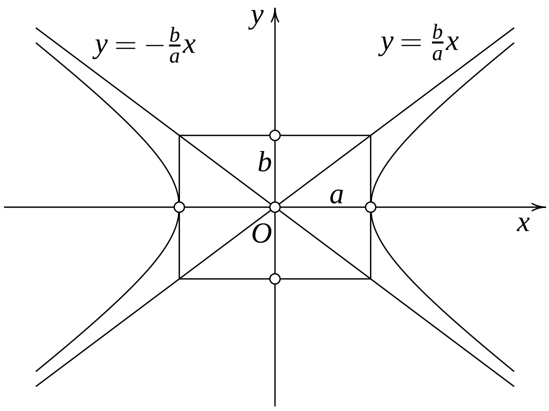
Hiperbola je jedan od važnih primera krive koja ima asimptote, što ćemo sada pokazati. Posmatrajmo centralnu hiperbolu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Rešavanjem po y dobijamo da je deo hiperbole iznad x-ose opisan jednačinom $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, dok je deo hiperbole ispod x-ose opisan jednačinom $y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Pokažimo da su $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$ asimptote ove hiperbole kada $x \to \pm\infty$. Zapravo, dokaz ćemo dati samo za prvu pravu kada $x \to +\infty$, jer se ostale tvrdnje koje smo izneli dokazuju analogno:

$$\lim_{x\to+\infty} |\mathscr{A}(x) - \mathscr{C}(x)| = \lim_{x\to+\infty} \left| \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \right| =$$
$$= \frac{b}{a} \cdot \lim_{x\to+\infty} \left| x - \sqrt{x^2 - a^2} \right| = \frac{b}{a} \cdot \lim_{x\to+\infty} \left| \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \right| = 0.$$

Na osnovu ovih razmatranja lako se zaključuje da se centralna hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

nalazi „u uglu” koga obrazuju njene asimptote $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$, i u spoljašnjosti pravougaonika sa centrom u koordinatnom početku, čije stranice su paralelne koordinatnim osama i imaju dužinu $2a$ i $2b$:



Ovim je ujedno data i geometrijska interpretacija parametra b: slično elipsi, i hiperbola je na izvestan način „određena” pravougaonikom čije stranice su $2a$ i $2b$. Međutim, pravi razlog zašto se parametar b zove *imaginarna* poluosa hiperbole vidi se ako centralnu jednačinu hiperbole zapišemo na sledeći način:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(ib)^2} = 1,$$

gde je i imaginarna jedinica. Vidimo da hiperbolu možemo da shvatimo kao elipsu čija jedna osa je imaginarni broj ib.

Par pravih kao degenerisani oblik hiperbole. Iako jednačina

$$x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$$

liči na jednačinu hiperbole čiji centar nije u koordinatnom početku, lako se vidi da je ona ekvivalentna sledećoj jednačini:

$$(x - y + 1)(x + y + 1) = 0.$$

Dakle, ovde se ne radi o jednačini hiperbole, već o jednačini koja opisuje par pravih. Par pravih zato smatramo *degenerisanim oblikom hiperbole*.

Primer. Šta predstavlja jednačina $x^2 - 4y^2 - 6x - 8y + 1 = 0$?

Rešenje. Dopunjavanjem do kvadrata lako se dobija da je ova jednačina ekvivalentna sa $(x-3)^2 - 4(y+1)^2 - 4 = 0$, odnosno, nakon deljenja sa 4:

$$\frac{(x-3)^2}{4} - (y+1)^2 = 1.$$

Prema tome, radi se o hiperboli čiji centar je u tački $(3,-1)$, čiji fokusi leže na pravoj koja je paralelna x-osi, čija realna poluosa je 2, a imaginarna poluosa 1. □

Primer. Šta predstavlja jednačina $3x^2 - y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$?

Rešenje. Dopunjavanjem do kvadrata lako se dobija da je ova jednačina ekvivalentna sa $(y-2)^2 - 3(x-1)^2 - 9 = 0$, odnosno, nakon deljenja sa 9:

$$\frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{3} = 1.$$

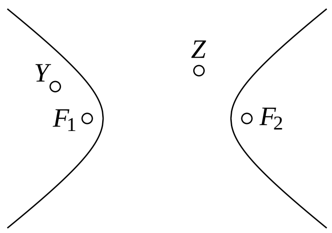
Prema tome, radi se o hiperboli čiji centar je u tački $(1,2)$, čiji fokusi leže na pravoj koja je paralelna y-osi, čija realna poluosa je 3, a imaginarna poluosa $\sqrt{3}$. □

Primer. Šta predstavlja jednačina $x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 3 = 0$?

Rešenje. Dopunjavanjem do kvadrata lako se dobija da je ova jednačina ekvivalentna sa $(x+1)^2 - 4(y-1)^2 = 0$. Korišćenjem formule za razliku kvadrata dobijamo $\big((x+1) - 2(y-1)\big)\big((x+1) + 2(y-1)\big) = 0$, odnosno,

$$(x - 2y + 3)(x + 2y - 1) = 0.$$

Prema tome, radi se o jednačini koja opisuje par pravih. □



Hiperbola deli ravan na tri oblasti: oblast koja sadrži fokus F_1, oblast koja sadrži fokus F_2, i oblast koju čini ostatak ravni. Za svaku tačku Y koja pripada prvoj ili drugoj od ove tri oblasti važi $|d(Y,F_1) - d(Y,F_2)| > 2a$, dok za svaku tačku Z iz treće oblasti važi $|d(Z,F_1) - d(Z,F_2)| < 2a$.

Odnos prave i hiperbole. Kao slučaju kruga i elipse, prava i hiperbola mogu da se nalaze u jednom od sledeća tri odnosa: prava ili seče hiperbolu u dve tačke, ili je dodiruje, ili sa njom nema zajedničkih tačaka. U prvom slučaju za pravu kažemo da je *sečica hiperbole*, a u drugom da je *tangenta hiperbole*. Odnos prave i hiperbole se analitički utvrđuje na isti način kao što je to bio slučaj kod kruga i elipse. Pogledajmo zato samo jedan primer.

Primer. Odrediti tangente na hiperbolu $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ iz tačke $(0,2)$.

Rešenje. Nakon množenja sa 4 jednačina hiperbole se može zapisati u sledećem, ekvivalentnom, obliku $x^2 - y^2 - 4 = 0$. Tangenta koju tražimo ima oblik

$y = kx + 2$ zato što prolazi kroz tačku $(0,2)$. Uvrstimo ovaj oblik jednačine tangente u jednačinu hiperbole i nakon sređivanja dobijamo

$$(1-k^2)x^2 - 4kx - 8 = 0.$$

Priroda rešenja ove kvadratne jednačine određuje odnos prave i hiperbole. Nama su potrebne tangente na hiperbolu, pa bi gornja kvadratna jednačina trebalo da ima samo jedno rešenje. Odatle dobijamo da njena diskriminanta mora biti jednaka nuli:

$$16k^2 + 32(1-k^2) = 0,$$

pa je $k_1 = \sqrt{2}$ i $k_2 = -\sqrt{2}$. Tražene tangente tako imaju jednačine $y = \sqrt{2}x + 2$ i $y = -\sqrt{2}x + 2$. □

Primer. Odrediti tangente na hiperbolu $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ iz njenog centra $(0,0)$.

Rešenje. Nakon množenja sa a^2b^2, jednačina hiperbole postaje $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$. Prave koje tražimo imaju oblik $y = kx$ zato što prolaze kroz tačku $(0,0)$. Kada uvrstimo ovaj oblik jednačine prave u jednačinu hiperbole, nakon sređivanja dobijamo

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - a^2b^2 = 0.$$

Kao i ranije, zato što prave koje tražimo treba da budu tangente, diskriminanta poslednje jednačine po k mora biti jednaka nuli:

$$4a^2b^2(b^2 - a^2k^2) = 0,$$

odakle je $k_1 = \frac{b}{a}$ i $k_2 = -\frac{b}{a}$. Dakle, tražene tangente imaju jednačine $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$. Međutim, ove dve prave su asimptote hiperbole, za koje znamo da nemaju zajedničkih tačaka sa hiperbolom. Dakle, *iz centra hiperbole se ne mogu konstruisati tangente na hiperbolu* (mada upravo zbog ovog primera ponekad, kada smo poetski raspoloženi, kažemo još i da „asimptote hiperbole tangiraju hiperbolu u beskonačnosti"). □

Teorema 62. *Prava $y = kx + n$ dodiruje hiperbolu $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ako i samo ako je $a^2k^2 - b^2 = n^2$.*

Dokaz. Nakon uvrštavanja linearne jednačine u kvadratnu i nakon množenja sa a^2b^2 dobijamo

$$b^2x^2 - a^2(kx+n)^2 = a^2b^2,$$

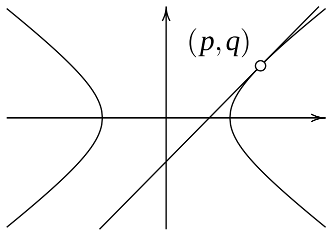
odnosno, nakon sređivanja,

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2kna^2x - a^2(n^2 + b^2) = 0.$$

Prava i hiperbola se dodiruju ako i samo ako prethodna jednačina ima jedno dvostruko rešenje, odnosno, ako i samo ako se njena diskriminanta anulira:

$$4k^2n^2a^4 + 4a^2(n^2 + b^2)(b^2 - a^2k^2) = 0,$$

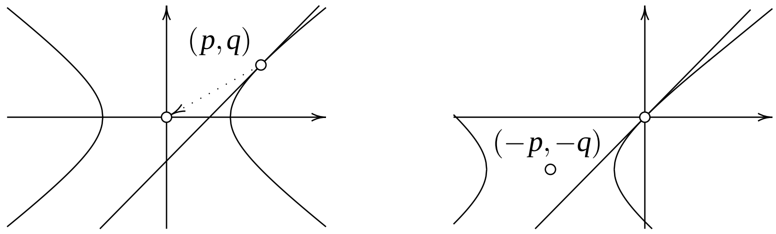
što je ekvivalentno sa $a^2k^2 - b^2 = n^2$. ■



Tangenta na hiperbolu u njenoj tački (p,q)**.** Izvešćemo sada jednačinu tangente na hiperbolu u njenoj tački (p,q). Kao i kod elipse, u prvom koraku ćemo samo izračunati koeficijent pravca tangente, a potom ćemo taj podatak upotrebiti za određivanje jednačine tangente.

Teorema 63. *Neka je* (p,q) *tačka na hiperboli* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *takva da je* $q \neq 0$*. Tada tangenta na hiperbolu u tački* (p,q) *ima koeficijent pravca* $\frac{pb^2}{qa^2}$*.*

Dokaz. Zato što tačka (p,q) leži na hiperboli znamo da za brojeve p i q važi sledeće: $b^2p^2 - a^2q^2 = a^2b^2$. Da bismo pojednostavili račun, transliraćemo celu situaciju za vektor $(-p,-q)$:



Tako dobijamo novu hiperbolu čiji centar je u tački $(-p,-q)$, i njenu tangentu koja je dodiruje u tački $(0,0)$. Jasno je da tangenta u novonastaloj situaciji ima isti koeficijent pravca kao i tangenta u originalnoj postavci problema.

Posmatrajmo sada novonastalu situaciju. Jednačina ove hiperbole je

$$\frac{(x+p)^2}{a^2} - \frac{(y+q)^2}{b^2} = 1,$$

dok jednačina tangente, očito, ima oblik $y = kx$. Treba da nađemo ono k za koje hiperbola i tangenta imaju samo jednu zajedničku tačku. Nakon uvrštavanja linearne jednačine u kvadratnu i množenja sa a^2b^2 dobijamo sledeću jednačinu po x:

$$b^2(x+p)^2 - a^2(kx+q)^2 = a^2b^2,$$

odnosno, nakon sređivanja izraza:

$$(b^2 - k^2a^2)x^2 + 2(pb^2 - kqa^2)x + (b^2p^2 - a^2q^2 - a^2b^2) = 0.$$

Kako je $b^2p^2 - a^2q^2 = a^2b^2$, jednačina postaje:

$$(b^2 - k^2a^2)x^2 + 2(pb^2 - kqa^2)x = 0.$$

Poslednja jednačina ima jedinstveno rešenje $x = 0$ ako i samo ako je $pb^2 - kqa^2 = 0$, odakle se rešavanjem po k dobija $k = \frac{pb^2}{qa^2}$. ■

Teorema 64. *Tangenta na hiperbolu* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *u njenoj tački* (p,q) *ima jednačinu* $\frac{px}{a^2} - \frac{qy}{b^2} = 1$*.*

Dokaz. Ako je $q = 0$ onda se radi o temenu hiperbole, tako da je $p = a$ ili $p = -a$. Odgovarajuće tangente tada imaju oblik $x = a$, odnosno, $x = -a$, respektivno, što je u saglasnosti sa tvrđenjem. Pretpostavimo, sada, da je $q \neq 0$. Prema Teoremi 63 koeficijent pravca tangente na hiperbolu u njenoj tački (p,q) je $k = \frac{pb^2}{qa^2}$, tako da jednačina tangente glasi

$$y - q = \frac{pb^2}{qa^2}(x - p),$$

odakle se sređivanjem dobija jednačina u sledećem obliku

$$pb^2x - qa^2y = p^2b^2 - q^2a^2$$

Kako tačka (p,q) leži na hiperboli, znamo da je $b^2p^2 - a^2q^2 = a^2b^2$. Dakle, jednačina tangente postaje

$$pb^2x - qa^2y = a^2b^2,$$

odnosno,

$$\frac{px}{a^2} - \frac{qy}{b^2} = 1$$

nakon deljenja sa a^2b^2. ■

Reflektivno svojstvo hiperbole. Da se podsetimo: hiperbola deli ravan na tri oblasti, oblast koja sadrži fokus F_1, oblast koja sadrži fokus F_2, i oblast koju čini ostatak ravni. Pokažimo sada da su oblasti koje sadrže fokuse konveksne figure. Pre glavnog tvrđenja dajemo jednu tehničku lemu.

Lema 65. *Neka su p,q,u,v realni brojevi takvi da je $p^2 - q^2 \geqslant 1$ i $u^2 - v^2 \geqslant 1$, i pri tome su p i u ne-nula brojevi istog znaka. Tada je $pu - qv \geqslant 1$.*

Dokaz. Iz $p^2 \geqslant 1 + q^2$ i $u^2 \geqslant 1 + v^2$, nakon množenja ovih dveju nejednačina, sledi da je $p^2u^2 \geqslant 1 + q^2 + v^2 + q^2v^2 \geqslant 1 + 2qv + q^2v^2 = (1+qv)^2$, jer je $q^2 + v^2 \geqslant 2qv$. Nakon korenovanja, koristeći da je $pu > 0$, dobijamo $pu \geqslant |1 + qv| \geqslant 1 + qv$. Dakle, $pu - qv \geqslant 1$. ■

Teorema 66. *Neka je $\Phi_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1,\ x < 0\right\}$ figura koju čine tačke onog dela ravni koji opisuje krak hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ koji je bliži fokusu F_1, a $\Phi_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1,\ x > 0\right\}$ figura koju čine tačke onog dela ravni koji opisuje krak hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ koji je bliži fokusu F_2. Figure Φ_1 i Φ_2 su konveksne.*

Dokaz. Dokažimo da je Φ_1 konveksna figura. Dokaz za figuru Φ_2 je analogan.

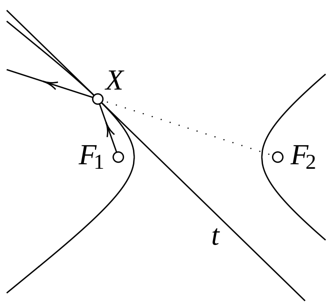
Neka su $A,B \in \Phi_1$ dve proizvoljne tačke figure Φ_1 i neka je $A = (x_0,y_0)$, $B = (x_1,y_1)$. Da bismo pokazali da je $[AB] \subseteq \Phi_1$, uzmimo proizvoljnu tačku

$C \in [AB]$. Tada postoje brojevi $\lambda, \mu \in [0,1]$ takvi da je $\lambda + \mu = 1$ i $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$. Tada je $C = (\lambda x_0 + \mu x_1, \lambda y_0 + \mu y_1)$. Da bismo pokazali da je $C \in \Phi_1$ treba da dokažemo da koordinate tačke C zadovoljavaju relacije $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$ i $\lambda x_0 + \mu x_1 < 0$. Druga relacija je očigledna, pa je dovoljno dokazati samo prvu. Lako se vidi da je:

$$\frac{(\lambda x_0 + \mu x_1)^2}{a^2} - \frac{(\lambda y_0 + \mu y_1)^2}{b^2} = \lambda^2\left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right) + \mu^2\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right) + 2\lambda\mu\left(\frac{x_0x_1}{a^2} - \frac{y_0y_1}{b^2}\right).$$

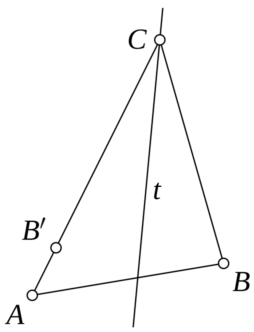
Zbog $A, B \in \Phi_1$ je $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} \geqslant 1$ i $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} \geqslant 1$, dok nam Lema 65 garantuje da je $\frac{x_0x_1}{a^2} - \frac{y_0y_1}{b^2} \geqslant 1$. Dakle,

$$\frac{(\lambda x_0 + \mu x_1)^2}{a^2} - \frac{(\lambda y_0 + \mu y_1)^2}{b^2} \geqslant \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu = (\lambda + \mu)^2 = 1.$$



Prema tome, $C \in \Phi_1$. Time je pokazano da je Φ_1 konveksna figura. ■

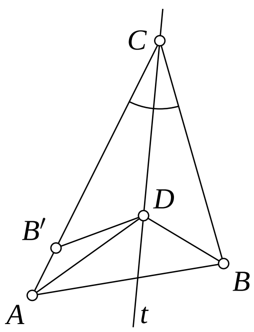
Pretpostavimo da smo iz fokusa F_1 ispalili zrak u proizvoljnom pravcu i neka se on odbio od hiperbole u tački X. Pokažimo da će tada odbijeni zrak nastaviti da se kreće po pravoj XF_2, ali udaljavajući se od tačke F_2. Drugim rečima, za proizvoljnu tačku X na hiperboli, poluprave XF_1 i XF_2 zaklapaju podudarne uglove sa tangentom na hiperbolu u tački X. Kao i ranije, pokazaćemo prvo nekoliko jednostavnih pomoćnih tvrđenja.



Lema 67. *Neka su A i B tačke sa raznih strana prave t i neka prava t seče duž $[AB]$ u tački koja nije središte duži $[AB]$. Tada na pravoj t postoji tačno jedna tačka C takva da poluprave CA i CB obrazuju podudarne uglove sa pravom t.*

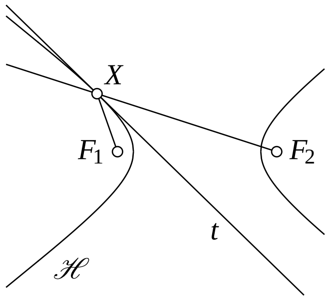
Dokaz. Neka je B' tačka osnosimetrična tački B u odnosu na pravu t. Zato što prava t seče duž $[AB]$ u tački koja nije središte duži $[AB]$, prava AB' seče pravu t u tački C. Očito je da poluprave CA i CB obrazuju podudarne uglove sa pravom t i da je C jedina tačka sa tom osobinom na pravoj t. ■

Lema 68. *Neka su A i B tačke sa raznih strana prave t i neka prava t seče duž $[AB]$ u tački koja nije središte duži $[AB]$ i neka je C tačka prave t. Tada je $\big|d(A,C) - d(B,C)\big|$ maksimalno ako i samo ako poluprave CA i CB obrazuju podudarne uglove sa pravom t.*



Dokaz. ($\Leftarrow$) Neka je C tačka prave t takva da poluprave CA i CB obrazuju podudarne uglove sa pravom t. Neka je B' tačka osnosimetrična tački B u odnosu na pravu t. Na osnovu izbora tačke C sledi da tačka B' pada na pravu AC. Neka je D tačka prave t različita od C. Tada je, prema nejednakosti trougla, $d(A,B') + d(B',D) > d(A,D)$, odnosno, $d(A,B') > |d(A,D) - d(B',D)|$. Kako je $[B'D] \cong [BD]$ i kako je $d(A,B') = |d(A,C) - d(B,C)|$, dobijamo da je $|d(A,C) - d(B,C)| > |d(A,D) - d(B,D)|$. Dakle, tačka C je tačka koja postiže maksimum apsolutne vrednosti navedene razlike.

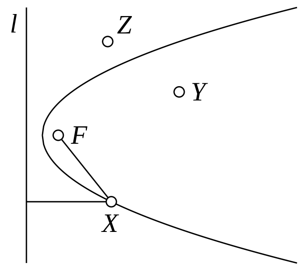
$(\Rightarrow)$ Neka je D tačka prave t takva da poluprave DA i DB obrazuju sa pravom t uglove koji nisu podudarni. Uočimo na pravoj t tačku C takvu da poluprave CA i CB obrazuju podudarne uglove sa pravom t. Prema dokazu iz prethodnog pasusa znamo da je tada $|d(A,C)-d(B,C)| > |d(A,D)-d(B,D)|$, pa tačka D nije tačka koja postiže maksimum apsolutne vrednosti navedene razlike. ■



Teorema 69. *Neka je $\mathscr{H}$ hiperbola sa fokusima F_1 i F_2 i neka je t tangenta na hiperbolu $\mathscr{H}$ koja je dodiruje u tački X. Tada poluprave XF_1 i XF_2 obrazuju podudarne uglove sa pravom t.*

Dokaz. Neka tangenta t dodiruje onaj krak hiperbole čije teme je bliže fokusu F_1. Pošto je oblast ravni određena hiperbolom $\mathscr{H}$ koja sadrži teme F_1 konveksna figura, za sve tačke $Y \in t$ koje su različite od X važi $|d(Y,F_1)-d(Y,F_2)| < 2a = |d(X,F_1)-d(X,F_2)|$. Prema tome, tačka X je tačka prave t koja ima osobinu da je $|d(X,F_1)-d(X,F_2)|$ maksimalno. Odatle, prema Lemi 68, sledi da poluprave XF_1 i XF_2 obrazuju podudarne uglove sa pravom t. ■

4.4 Parabola

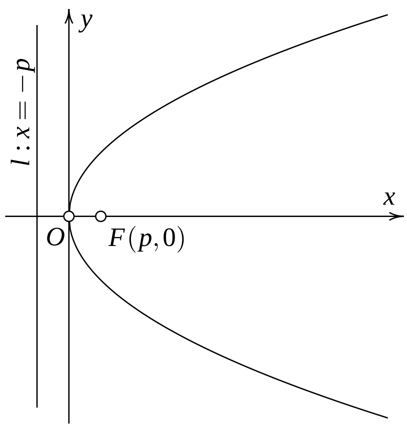


Neka je F tačka i l prava koja je ne sadrži. *Parabola sa fokusom F i direktrisom l* je skup svih tačaka X u ravni čija rastojanja do F i do l su jednaka:

$$d(X,F) = d(X,l).$$

Za tačku Y ravni za koju je $d(Y,F) < d(Y,l)$ kažemo da je *unutrašnja* tačka parabole, dok za tačku Z ravni za koju je $d(Z,F) > d(Z,l)$ kažemo da je *spoljašnja* tačka parabole.

Ako postavimo koordinatni sistem tako da tačka F ima koordinate $(p,0)$, a prava l jednačinu $x=-p$ za neko $p>0$ lako se proverava da tada parabola prolazi kroz koordinatni početak O:



Tačka O, središte normale iz F na l, se zove *teme parabole*, dok se prava koja prolazi kroz fokus parabole i normalna je na direktrisu, u ovom slučaju, x-osa, zove *osa parabole*. Osa parabole je osa simetrije parabole.

Teorema 70 (Centralna jednačina parabole). *Neka je $\mathscr{P}$ parabola sa centrom u koordinatnom početku, sa fokusom u tački $F(p,0)$ i direktrisom $l : x = -p$, gde je $p > 0$. Tačka (x,y) pripada paraboli $\mathscr{P}$ ako i samo ako je*

$$y^2 = 4px.$$

Tačka (x,y) pripada unutrašnjosti parabole $\mathscr{P}$ ako i samo ako je

$$y^2 < 4px,$$

a pripada spoljašnjosti parabole $\mathscr{P}$ ako i samo ako je

$$y^2 > 4px.$$

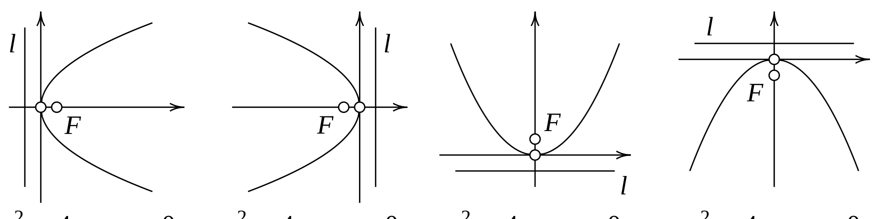
Dokaz. Neka je $X(x,y)$ proizvoljna tačka parabole. Onda je $d(X,F) = d(X,l)$, odnosno $\sqrt{(x-p)^2+y^2} = x+p$. Nakon kvadriranja i sređivanja pravolinijski dobijamo $y^2 = 4px$. Na isti način dobijamo sledeće: ako je tačka (x,y) unutrašnja tačka parabole onda je $y^2 < 4px$, a ako se radi o spoljašnjoj tački onda je $y^2 > 4px$. Time su jednim potezom pokazane sve tri ekvivalencije. ■

Ukoliko teme parabole nije u koordinatnom početku već u tački (r,s) jednačina parabole postaje:

$$(y-s)^2 = 4p(x-r).$$

Takođe, lako se zaključuje da je tačka (x,y) unutrašnja tačka ove parabole ako i samo ako je $(y-s)^2 < 4p(x-r)$, odnosno, da se radi o spoljašnjoj tački ako i samo ako je $(y-s)^2 > 4p(x-r)$.

Na sličan način se dobija da i jednačina $x^2 = 4px$ predstavlja jednačinu parabole čija osa je y-osa. Ukoliko je $p < 0$, otvor parabole gleda u negativnom smeru ose parabole, kako je to pokazano na slici ispod:



$y^2 = 4px,\ p > 0$ $y^2 = 4px,\ p < 0$ $x^2 = 4py,\ p > 0$ $x^2 = 4py,\ p < 0$

Primer. Odrediti koordinate temena i fokusa parabole $y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$.

Rešenje. Dopunjavanjem do kvadrata lako se dobija da je ova jednačina ekvivalentna sa $(y-2)^2 = 2(x-3)$, odakle se vidi da se teme parabole nalazi u tački $(3,2)$, da je parametar $p = 1/2$ kao i da je otvor parabole usmeren u pravcu x-ose. Prema tome, fokus parabole je u tački $(7/2,2)$. □

Primer. Odrediti koordinate temena i fokusa parabole $y^2+4x+2y-19=0$.

Rešenje. Dopunjavanjem do kvadrata lako se dobija da je ova jednačina ekvivalentna sa $(y+1)^2=-4(x-5)$, odakle se vidi da se teme parabole nalazi u tački $(5,-1)$, da je parametar $p=-1$ kao i da je otvor parabole usmeren u pravcu suprotnom od pravca x-ose. Prema tome, fokus parabole je u tački $(4,-1)$. □

Primer. Odrediti koordinate temena i fokusa parabole $x^2-6x+4y+17=0$.

Rešenje. Dopunjavanjem do kvadrata lako se dobija da je ova jednačina ekvivalentna sa $(x-3)^2=-4(y+2)$, odakle se vidi da se teme parabole nalazi u tački $(3,-2)$, da je parametar $p=-1$ kao i da je otvor parabole usmeren u pravcu suprotnom od pravca y-ose. Prema tome, fokus parabole je u tački $(3,-3)$. □

Odnos prave i parabole. Kao i u slučaju drugih krivih koje smo razmatrali, prava i parabola mogu da se nalaze u jednom od sledeća tri odnosa: prava ili seče parabolu u dve tačke, ili je dodiruje, ili sa njom nema zajedničkih tačaka. U prvom slučaju za pravu kažemo da je *sečica parabole*, a u drugom da je *tangenta parabole*. Odnos prave i parabole se analitički utvrđuje na isti način kao i u slučaju drugih krivih. Pogledajmo zato samo jedan primer.

Primer. Odrediti tangente na parabolu $y^2=4x$ iz tačke $(-1,0)$.

Rešenje. Tangente koje tražimo imaju oblik $y=kx+k$ zato što prolaze kroz tačku $(-1,0)$. Uvrstimo ovaj oblik jednačine tangente u jednačinu parabole i nakon sređivanja dobijamo

$$k^2x^2+2x(k^2-2)+k^2=0.$$

Priroda rešenja ove kvadratne jednačine određuje odnos prave i parabole. Nama su potrebne tangente na parabolu, pa bi gornja kvadratna jednačina trebalo da ima samo jedno rešenje. Odatle dobijamo da njena diskriminanta mora biti jednaka nuli:

$$(k^2-2)^2-k^4=0,$$

odakle je $k_1=1$ i $k_2=-1$. Tražene tangente tako imaju jednačine $y=x+1$ i $y=-x-1$. □

Teorema 71. *Prava $y=kx+n$ dodiruje parabolu $y^2=4px$ ako i samo ako je $p=kn$.*

Dokaz. Nakon uvrštavanja linearne jednačine u kvadratnu dobijamo

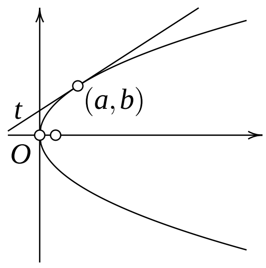
$$(kx+n)^2=4px$$

odnosno, nakon sređivanja,

$$k^2x^2+2(kn-2p)x+n^2=0.$$

Prava i parabola se dodiruju ako i samo ako prethodna jednačina ima jedno dvostruko rešenje, odnosno, ako i samo ako se njena diskriminanta anulira:

$$4(kn-2p)^2-4k^2n^2=0,$$

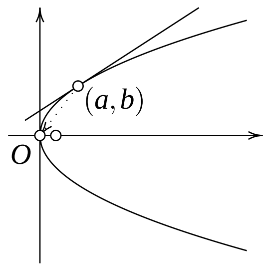


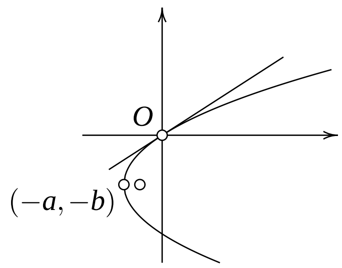
što je ekvivalentno sa $p=kn$. ■

Tangenta na parabolu u njenoj tački (a,b). Izvešćemo sada jednačinu tangente na parabolu u njenoj tački (a,b). U prvom koraku ćemo samo izračunati koeficijent pravca tangente, a potom ćemo taj podatak upotrebiti za određivanje jednačine tangente.

Teorema 72. *Neka je (a,b) tačka na paraboli $y^2=4px$ takva da je $b\neq 0$. Tada tangenta na parabolu u tački (a,b) ima koeficijent pravca $\frac{2p}{b}$.*

Dokaz. Zato što tačka (a,b) leži na paraboli znamo da je $b^2=4pa$. Da bismo pojednostavili račun, transliraćemo celu situaciju za vektor $(-a,-b)$. Tako dobijamo novu parabolu čije teme je u tački $(-a,-b)$, i njenu tangentu koja je dodiruje u tački $(0,0)$. Jasno je da tangenta u novonastaloj situaciji ima isti koeficijent pravca kao i tangenta u originalnoj postavci problema.





Posmatrajmo sada novonastalu situaciju. Jednačina ove parabole je

$$(y+b)^2=4p(x+a),$$

dok jednačina tangente, očito, ima oblik $y=kx$. Treba da nađemo ono k za koje parabola i tangenta imaju samo jednu zajedničku tačku. Nakon uvrštavanja linearne jednačine u kvadratnu i sređivanja dobijamo sledeću jednačinu po x:

$$k^2x^2+2(kb-2p)x+(b^2-4pa)=0.$$

Kako je $b^2=4pa$, jednačina postaje:

$$k^2x^2+2(kb-2p)x=0.$$

Poslednja jednačina ima jedinstveno rešenje $x=0$ ako i samo ako je $kb=2p$, odakle se rešavanjem po k dobija $k=\frac{2p}{b}$. ■

Teorema 73. *Tangenta na parabolu $y^2=4px$ u njenoj tački (a,b) ima jednačinu $by=2p(x+a)$.*

Dokaz. Ako je $b = 0$ onda je i $a = 0$ zato što se radi o temenu parabole. Tada tangenta ima oblik $x = 0$ što je u saglasnosti sa tvrđenjem. Pretpostavimo, sada, da je $b \neq 0$. Prema Teoremi 72 koeficijent pravca tangente na parabolu u njenoj tački (a,b) je $k = \frac{2p}{b}$, tako da jednačina tangente glasi $y - b = \dfrac{2p}{b}(x-a)$, odakle se sređivanjem dobija jednačina u sledećem obliku $by = 2px + b^2 - 2pa$. Kako tačka (a,b) leži na paraboli, znamo da je $b^2 = 4pa$. Dakle, jednačina tangente postaje $by = 2px + 2pa = 2p(x+a)$. ■

Reflektivno svojstvo parabole. Dokažimo sada da je figura koju čine parabola i njena unutrašnjost konveksna figura. Pre glavnog stava dajemo jedno pomoćno tvrđenje.

Lema 74. *Neka su a, b, λ, μ realni brojevi takvi da je $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ i $\lambda + \mu = 1$. Tada je $(\lambda a + \mu b)^2 \leqslant \lambda a^2 + \mu b^2$.*

Dokaz. Očito je $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, pa sledi da je $\lambda\mu a^2 + \lambda\mu b^2 \geqslant 2\lambda\mu ab$. Koristeći uslov $\lambda + \mu = 1$, prethodna nejednakost može da se zapiše i ovako:

$$\lambda(1-\lambda)a^2 + \mu(1-\mu)b^2 \geqslant 2\lambda\mu ab,$$

odakle se, nakon sređivanja, lako dobija $\lambda a^2 + \mu b^2 \geqslant (\lambda a + \mu b)^2$. ■

Teorema 75. *Neka je $\Phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leqslant 4px\}$ figura koju čine tačke parabole $y^2 = 4px$ i sve njene unutrašnje tačke. Figura Φ je konveksna.*

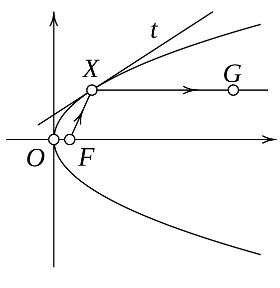
Dokaz. Neka su $A, B \in \Phi$ dve proizvoljne tačke figure Φ i neka je $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_1, y_1)$. Da bismo pokazali da je $[AB] \subseteq \Phi$, uzmimo proizvoljnu tačku $C \in [AB]$. Tada postoje brojevi $\lambda, \mu \in [0,1]$ takvi da je $\lambda + \mu = 1$ i $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$. Tada je $C = (\lambda x_0 + \mu x_1, \lambda y_0 + \mu y_1)$. Da bismo pokazali da je $C \in \Phi$ treba da dokažemo da koordinate tačke C zadovoljavaju relaciju $y^2 \leqslant 4px$. Prema Lemi 74 je

$$(\lambda y_0 + \mu y_1)^2 \leqslant \lambda y_0^2 + \mu y_1^2.$$

Zbog $A, B \in \Phi$ je $y_0^2 \leqslant 4px_0$ i $y_1^2 \leqslant 4px_1$. Dakle,

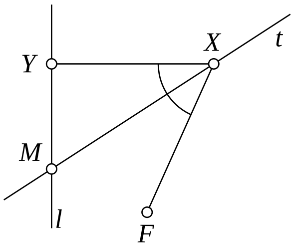
$$(\lambda y_0 + \mu y_1)^2 \leqslant \lambda y_0^2 + \mu y_1^2 \leqslant 4p(\lambda x_0 + \mu x_1).$$

čime je pokazano da je $C \in \Phi$. ■



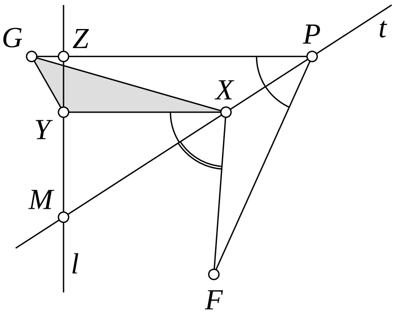
Pretpostavimo da smo iz fokusa F ispalili zrak u proizvoljnom pravcu i neka se on odbio od parabole. Pokažimo da će tada odbijeni zrak nastaviti da se kreće po pravcu koji je paralelan sa osom parabole. Drugim rečima, poluprave XF i XG zaklapaju podudarne uglove sa tangentom na parabolu u tački X, gde je XG poluprava koja počinje u X i paralelna je osi parabole.

Lema 76. *Neka su t i l prave koje se seku u tački M, neka je F tačka koja ne leži ni na t ni na l, neka je $X \in t$ tačka na t takva da je $d(X,F) = d(X,l)$ i neka je Y*

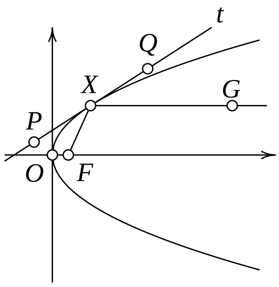


podnožje normale iz X na l. Pretpostavimo da za svaku drugu tačku $P \in t$, $P \neq X$, važi $d(P,F) > d(P,l)$. Onda je $\angle MXF \cong \angle MXY$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da $\angle MXF \ncong \angle MXY$. Neka je $\angle MXF > \angle MXY$ (druga mogućnost se razmatra analogno). Uočimo tačku $P \in t$ takvu da je $\angle MPF \cong \angle MXY$ i neka je Z podnožje normale iz P na l. Tada je $\angle MPF \cong \angle MPZ$. Očito je $P \neq X$, tako da, prema uslovu leme, mora da bude $[PF] > [PZ]$.



Neka je G slika tačke F osnom simetrijom u odnosu na pravu t. Tada G leži na pravoj PZ i mora biti $(G-Z-P)$ jer je $[PG] \cong [PF] > [PZ]$. Štaviše, zbog osne simetrije je $[XG] \cong [XF]$, pa kako je $[XF] \cong [XY]$, zaključujemo da je $[XG] \cong [XY]$. S druge strane, ugao kod temena Y trougla XYG je tup, pa je $[XG] > [XY]$. Kontradikcija. ■



Teorema 77. *Neka je $\mathscr{P}$ parabola sa fokusom F i neka je t tangenta na parabolu $\mathscr{P}$ koja je dodiruje u tački X. Neka je G tačka u unutrašnjosti parabole takva da je prava XG paralelna osi parabole. Neka su P i Q tačke prave t takve da je $(P-X-Q)$. Tada je $\angle FXP \cong \angle GXQ$.*

Dokaz. Pošto je parabola konveksna figura, sve tačke prave t, osim tačke X, su spoljašnje tačke parabole $\mathscr{P}$. Zato je $d(Y,F) > d(Y,l)$ za svako $Y \in t$ takvo da je $Y \neq X$, pa prema Lemi 76, sledi da je $\angle FXP \cong \angle GXQ$. ■

4.5 Klasifikacija krivih drugog reda

U ovom odeljku ćemo izvršiti klasifikaciju krivih drugog reda u ravni. Pokazaćemo da su, osim nekoliko degenerisanih slučajeva, krug, elipsa, hiperbola i parabola jedine krive drugog reda u ravni. Ključni element u dokazu je rezultat sledeće teoreme da se svaka kriva drugog reda u ravni može pogodno odabranom rotacijom svesti na krivu drugog reda u čijoj jednačini ne učestvuje sabirak oblika Mxy.

Teorema 78. *Za svaku krivu $\mathscr{C}$ drugog reda u ravni postoji ugao θ takav da se rotacijom krive $\mathscr{C}$ oko koordinatnog početka za ugao θ dobija kriva $\mathscr{C}'$ drugog reda čija jednačina ima oblik $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$.*

Dokaz. Neka je kriva $\mathscr{C}$ data jednačinom $L\tilde{x}^2+M\tilde{x}\tilde{y}+N\tilde{y}^2+P\tilde{x}+Q\tilde{y}+R=0$ po nepoznatim $\tilde{x}$ i $\tilde{y}$. Ako u ovu jednačinu uvedemo smenu promenljivih koja opisuje rotaciju za ugao θ:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x\cos\theta - y\sin\theta,\\ \tilde{y} &= x\sin\theta + y\cos\theta,\end{aligned}$$

dobijamo novu jednačinu po x i y koja izgleda ovako:

$$\begin{aligned}A(\theta)\cdot x^2+((N-L)\sin 2\theta + M\cos 2\theta)\cdot xy+\\ +B(\theta)\cdot y^2+C(\theta)\cdot x+D(\theta)\cdot y+E(\theta)=0,\end{aligned}$$

gde su $A(\theta)$, $B(\theta)$, $C(\theta)$, $D(\theta)$ i $E(\theta)$ izrazi u kojima figuriše θ, a čiji tačan oblik nije bitan za nastavak dokaza. Mi zapravo želimo da odaberemo ugao θ tako da se izraz uz xy anulira. Ako je $L=N$ ugao $\theta_0=\frac{\pi}{4}$ anulira pomenuti izraz. Ako je, međutim, $L\neq N$ tada treba da nađemo θ takvo da je

$$(N-L)\sin 2\theta + M\cos 2\theta = 0,$$

odnosno,

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{M}{L-N}.$$

Jedno rešenje ove jednačine je

$$\theta_0 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{M}{L-N}.$$

U svakom slučaju, za ugao θ_0 koji je odabran na ovaj način dobijamo da kriva $\mathscr{C}'$ ima jednačinu oblika

$$A_0x^2+B_0y^2+C_0x+D_0y+E_0=0,$$

gde je $A_0=A(\theta_0)$, $B_0=B(\theta_0)$, $C_0=C(\theta_0)$, $D_0=D(\theta_0)$ i $E_0=E(\theta_0)$. $\blacksquare$

Teorema 79. *Neka su A i B realni brojevi takvi da je $AB>0$ i neka je $\mathscr{E}$ skup tačaka u ravni čije koordinate zadovoljavaju jednačinu $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$. Tada je $\mathscr{E}$ prazan skup, ili se sastoji samo od jedne tačke, ili predsavlja krug, ili predstavlja elipsu čije ose su paralelne koordinatnim osama.*

Dokaz. Dopunjavanjem do kvadrata, polinom $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ se drugačije može zapisati ovako:

$$A\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2+B\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2=\Delta,$$

gde je $\Delta=\frac{C^2}{4A}+\frac{D^2}{4B}-E$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $A>0$ i $B>0$. Ako je $\Delta<0$ tada ne postoji nijedan par realnih brojeva (x,y) koji bi zadovoljavao ovu jednačinu, pa je $\mathscr{E}=\varnothing$. Ako je $\Delta=0$ tada gornja jednačina ima tačno jedno rešenje $x = -\frac{C}{2A}$, $y = -\frac{D}{2B}$ i tada je $|\mathscr{E}| = 1$. Konačno, ako je $\Delta > 0$ onda se prethodna jednačina može zapisati i ovako:

$$\frac{\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2}{\Delta/A} + \frac{\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2}{\Delta/B} = 1,$$

odakle se lako vidi da se radi o elipsi čije ose su paralelne koordinatnim osama, čiji centar je u tački $(-\frac{C}{2A}, -\frac{D}{2B})$ i čije poluose su $\sqrt{\Delta/A}$ i $\sqrt{\Delta/B}$. Specijalno, za $A = B$ radi se o krugu poluprečnika $\sqrt{\Delta/A}$. ■

Teorema 80. *Neka su A i B realni brojevi takvi da je $AB < 0$. Tada jednačina $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ predstavlja jednačinu hiperbole čije ose su paralelne koordinatnim osama ili jednačinu para pravih.*

Dokaz. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da se radi o jednačini oblika $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$ gde je $A > 0$ i $B > 0$. Dopunjavanjem do kvadrata, polinom $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$ se drugačije može zapisati ovako:

$$A\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2 - B\left(y-\frac{D}{2B}\right)^2 = \Delta, \tag{$*$}$$

gde je $\Delta = \frac{C^2}{4A} - \frac{D^2}{4B} - E$. Ako je $\Delta > 0$, jednačina $(*)$ se može zapisati ovako:

$$\frac{\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2}{\Delta/A} - \frac{\left(y-\frac{D}{2B}\right)^2}{\Delta/B} = 1,$$

odakle se lako vidi da se radi o hiperboli čiji fokusi leže na pravoj koja je paralelna x-osi. Ako je $\Delta < 0$, jednačina $(*)$ se može zapisati ovako:

$$\frac{\left(y-\frac{D}{2B}\right)^2}{(-\Delta)/B} - \frac{\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2}{(-\Delta)/A} = 1,$$

odakle se vidi da se radi o hiperboli čiji fokusi leže na pravoj koja je paralelna y-osi. Konačno, ako je $\Delta = 0$, koristeći obrazac za razliku kvadrata jednačina $(*)$ se može zapisati ovako:

$$\left(\sqrt{A}(x+\tfrac{C}{2A}) - \sqrt{B}(y-\tfrac{D}{2B})\right)\left(\sqrt{A}(x+\tfrac{C}{2A}) + \sqrt{B}(y-\tfrac{D}{2B})\right) = 0,$$

odnosno, nakon sređivanja,

$$\left(\sqrt{A}x - \sqrt{B}y + (\tfrac{C}{2\sqrt{A}} + \tfrac{D}{2\sqrt{B}})\right)\left(\sqrt{A}x + \sqrt{B}y + (\tfrac{C}{2\sqrt{A}} - \tfrac{D}{2\sqrt{B}})\right) = 0,$$

što je jednačina koja opisuje par pravih. ■

Teorema 81. *(1) Neka je B ne-nula realan broj i neka je $\mathscr{P}$ skup tačaka u ravni čije koordinate zadovoljavaju jednačinu $By^2 + Cx + Dy + E = 0$. Tada je $\mathscr{P}$ prazan skup, ili je u pitanju prava paralelna x-osi, ili se se radi o paru pravih koje su paralelne x-osi, ili $\mathscr{P}$ predstavlja parabolu čija osa je paralelna x-osi.*

(2) Neka je A ne-nula realan broj i neka je $\mathscr{P}$ skup tačaka u ravni čije koordinate zadovoljavaju jednačinu $Ax^2+Cx+Dy+E=0$. Tada je $\mathscr{P}$ prazan skup, ili je u pitanju prava paralelna y-osi, ili se se radi o paru pravih koje su paralelne y-osi, ili $\mathscr{P}$ predstavlja parabolu čija osa je paralelna y-osi.

Dokaz. Dovoljno je dokazati samo (1), pošto je dokaz stava (2) analogan. Neka je $B \neq 0$. Dopunjavanjem do kvadrata, polinom $By^2+Cx+Dy+E=0$ se drugačije može zapisati ovako:

$$\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2=-\frac{C}{B}x+\Delta.$$

gde je $\Delta=\frac{D^2}{4B^2}-\frac{E}{B}$.

Slučaj 1: $C=0$. Tada jednačina postaje

$$\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2=\Delta.$$

Ako je $\Delta<0$, ne postoji nijedan par realnih brojeva (x,y) koji bi zadovoljavao ovu jednačinu. Ako je $\Delta=0$ radi se o pravoj $y=-\frac{D}{2B}$. Konačno, ako je $\Delta>0$, radi se o paru pravih koje su paralelne x-osi.

Slučaj 2: $C \neq 0$. Tada jednačina postaje

$$\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2=-\frac{C}{B}\left(x-\frac{B\Delta}{C}\right),$$

pa lako zaključujemo da se radi o paraboli čija osa je paralelna x-osi. ■

Teorema 82. *Jednačinom $Ax^2+Mxy+By^2+Cx+Dy+E=0$ opisana je jedna od sledećih geometrijskih figura:*

(i) prazan skup,	*(v) krug,*
(ii) jedna tačka,	*(vi) elipsa,*
(iii) prava,	*(vii) hiperbola, ili*
(iv) par pravih,	*(viii) parabola.*

Za geometrijske figure (i)–(iv) kažemo da predstavljaju degenerisane krive dugog reda.

Dokaz. Prema Teoremi 78, bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $M=0$.

Slučaj 1: Ako je $A=B=0$, jednačina opisuje pravu ili prazan skup.

Slučaj 2: Ako je $A=0$ i $B\neq 0$, ili $A\neq 0$ i $B=0$, prema Teoremi 81 jednačina opisuje prazan skup, pravu, par pravih ili parabolu.

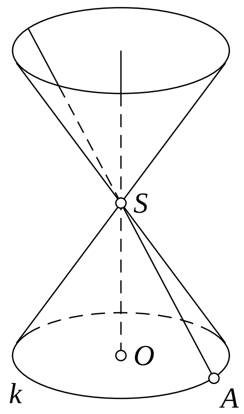
Slučaj 3: Neka je $A\neq 0$ i $B\neq 0$.

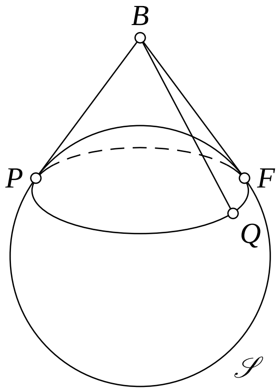
Slučaj 3.1: Ako je $A=B$, prema Teoremi 49 jednačina opisuje prazan skup, tačku ili krug.

Slučaj 3.2: Ako je $A\neq B$, ali A i B su istog znaka, prema Teoremi 79 jednačina opisuje prazan skup, tačku ili elipsu.

Slučaj 3.3: Ako je $A\neq B$ i pri tome su A i B su različitog znaka, prema Teoremi 80 jednačina opisuje par pravih ili hiperbolu. ■

4.6 Konusni preseci





U ovom odeljku ćemo pokazati da se krive drugog reda mogu dobiti u preseku konusa i ravni postavljene na poseban način. Tako se, zapravo, i razmišljalo o krivama drugog reda stotinama godina pre pojave analitičke geometrije. Podsetimo se, zato, pojma konusa. Neka je k krug sa centrom O i neka je S tačka izvan ravni kruga čija ortogonalna projekcija na ravan kruga je tačka O. *Konus* je geometrijska figura koja se dobija unijom svih pravih AS gde je $A \in k$. Prava OS se zove *osa konusa*, dok se prave AS zovu *izvodnice konusa*. Krug k se zove *generatrisa konusa*. *Konusni presek* je kriva koja nastaje u preseku konusa i neke ravni.

Pre nego što krenemo sa opisom konusnih preseka podsetimo se jednog jednostavnog ravanskog tvrđenja: ako je B tačka u spoljašnjosti kruga k i ako su $[BP]$ i $[BQ]$ tangentne duži iz B na k tada je $[BP] \cong [BQ]$. Slično tvrđenje važi u prostoru: ako je B tačka u spoljašnjosti sfere $\mathscr{S}$, tada su sve tangentne duži iz B na $\mathscr{S}$ međusobno podudarne. Konkretno, u primeru koji je ilustrovan pored, $[BP] \cong [BQ] \cong [BF]$. Očito, prave BP, BQ i BF su izvodnice konusa sa vrhom u B koji tangira sferu $\mathscr{S}$.

Teorema 83. *Neka je α ravan koja ne sadrži vrh S konusa $\mathscr{C}$, i ortogonalna je na osu konusa $\mathscr{C}$. Tada se u preseku ravni α i konusa $\mathscr{C}$ dobija krug.* ■

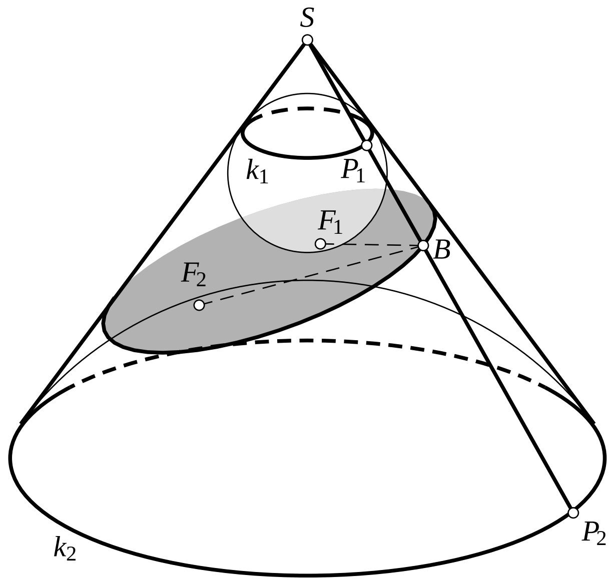
Teorema 84. *Neka je α ravan koja ne sadrži vrh S konusa $\mathscr{C}$, koja nije ni paralelna ni ortogonalna na osu konusa $\mathscr{C}$, i koja seče samo jednu granu konusa. Tada se u preseku ravni α i konusa $\mathscr{C}$ dobija elipsa.*

Dokaz. U unutrašnjosti konusa uočimo sfere $\mathscr{S}_1$ i $\mathscr{S}_2$ tako da obe dodiruju konus po krugu, obe dodiruju ravan α i pri tome je $\mathscr{S}_1$ sa one strane ravni α sa koje je tačka S, a sfera $\mathscr{S}_2$ je sa one druge strane ravni α (Sl. 4.2). Neka sfera $\mathscr{S}_1$ dodiruje konus po krugu k_1 i ravan α u tački F_1, dok sfera $\mathscr{S}_2$ dodiruje konus po krugu k_2 i ravan α u tački F_2. Neka je B proizvoljna tačka na krivoj γ koja nastaje u preseku konusa $\mathscr{C}$ i ravni α. Dokažimo da je $[BF_1] + [BF_2]$ konstantno, odakle, po definiciji, sledi da je γ elipsa. (Prema tome, $\mathscr{S}_1$ i $\mathscr{S}_2$ dodiruju ravan α tačno u fokusima elipse!)

Neka izvodnica SB konusa $\mathscr{C}$ seče krug k_1 u tački P_1, a krug k_2 u tački P_2. Duž $[BF_1]$ je tangentna duž na sferu $\mathscr{S}_1$ zato što leži u ravni α koja dodiruje sferu $\mathscr{S}_1$ u tački F_1. S druge strane, $[BP_1]$ je tangentna duž na sferu $\mathscr{S}_1$ zato što sfera $\mathscr{S}_1$ dodiruje konus po krugu k_1. Kako su sve tangentne duži iz date tačke na sferu podudarne, sledi da je $[BF_1] \cong [BP_1]$. Na isti način zaključujemo da je $[BF_2] \cong [BP_2]$. Prema tome, $[BF_1] + [BF_2] \cong [BP_1] + [BP_2] = [P_1P_2]$, što ne zavisi od izbora tačke B sa krive γ. Dakle, $[BF_1] + [BF_2]$ je konstantno, pa je γ elipsa sa fokusima F_1 i F_2. ■

Teorema 85. *Neka je α ravan koja ne sadrži vrh S konusa $\mathscr{C}$ i seče obe njegove grane. Tada se u preseku ravni α i konusa $\mathscr{C}$ dobija hiperbola.*

Dokaz. U unutrašnjosti konusa uočimo sfere $\mathscr{S}_1$ i $\mathscr{S}_2$ tako da obe dodiruju konus po krugu, obe dodiruju ravan α i pri tome se jedna nalazi u jednoj, a druga u



Slika 4.2: Elipsa kao konusni presek

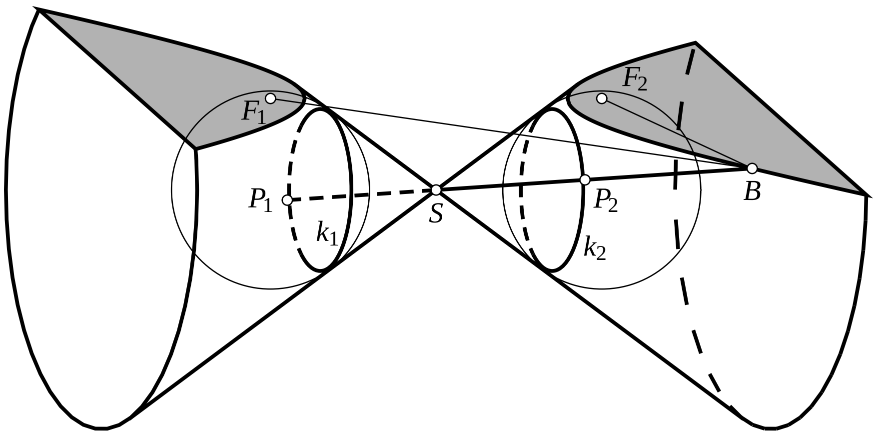
drugoj grani konusa (Sl. 4.3). Neka sfera $\mathscr{S}_1$ dodiruje konus po krugu k_1 i ravan α u tački F_1, dok sfera $\mathscr{S}_2$ dodiruje konus po krugu k_2 i ravan α u tački F_2. Neka je B proizvoljna tačka na krivoj γ koja nastaje u preseku konusa $\mathscr{C}$ i ravni α. Dokažimo da je $\big||BF_1| - |BF_2|\big|$ konstantno, odakle, po definiciji, sledi da je γ hiperbola. (Prema tome, $\mathscr{S}_1$ i $\mathscr{S}_2$ dodiruju ravan α tačno u fokusima hiperbole!)

Pretpostavimo, prvo, da B pripada onoj grani krive γ koji nastaje u preseku ravni α i grane konusa u koju je smeštena sfera $\mathscr{S}_2$. Neka izvodnica SB konusa $\mathscr{C}$ seče krug k_1 u tački P_1, a krug k_2 u tački P_2. Duž $[BF_1]$ je tangentna duž na sferu $\mathscr{S}_1$ zato što leži u ravni α koja dodiruje sferu $\mathscr{S}_1$ u tački F_1. S druge strane, $[BP_1]$ je tangentna duž na sferu $\mathscr{S}_1$ zato što sfera $\mathscr{S}_1$ dodiruje konus po krugu k_1. Kako su sve tangentne duži iz date tačke na sferu podudarne, sledi da je $[BF_1] \cong [BP_1]$. Na isti način zaključujemo da je $[BF_2] \cong [BP_2]$. Prema tome, $[BF_1] - [BF_2] \cong [BP_1] - [BP_2] = [P_1P_2]$, što ne zavisi od izbora tačke B, sve dok B pripada uočenoj grani krive γ.

Ukoliko B pripada onoj drugoj grani krive γ, na osnovu analogne argumentacije dobijamo da je $[BF_2] - [BF_1] \cong [BP_2] - [BP_1] = [P_1P_2]$. U svakom slučaju je $\big||BF_1| - |BF_2|\big|$ konstantno, pa je γ hiprebola sa fokusima F_1 i F_2. ■

Teorema 86. *Neka je α ravan koja ne sadrži vrh S konusa $\mathscr{C}$, i koja je paralelna jednoj izvodnici tog konusa. Tada se u preseku ravni α i konusa $\mathscr{C}$ dobija parabola.*

Dokaz. Neka je α ravan koja ne sadrži vrh S konusa $\mathscr{C}$, i neka je α paralelna izvodnici SE tog konusa. U unutrašnjosti konusa uočimo sferu $\mathscr{S}$ koja dodiruje konus po krugu, dodiruje ravan α i nalazi se sa one strane ravni α sa koje je tačka S (Sl. 4.4). Neka sfera $\mathscr{S}$ dodiruje konus po krugu k, a ravan α u tački F. Neka je



Slika 4.3: Hiperbola kao konusni presek

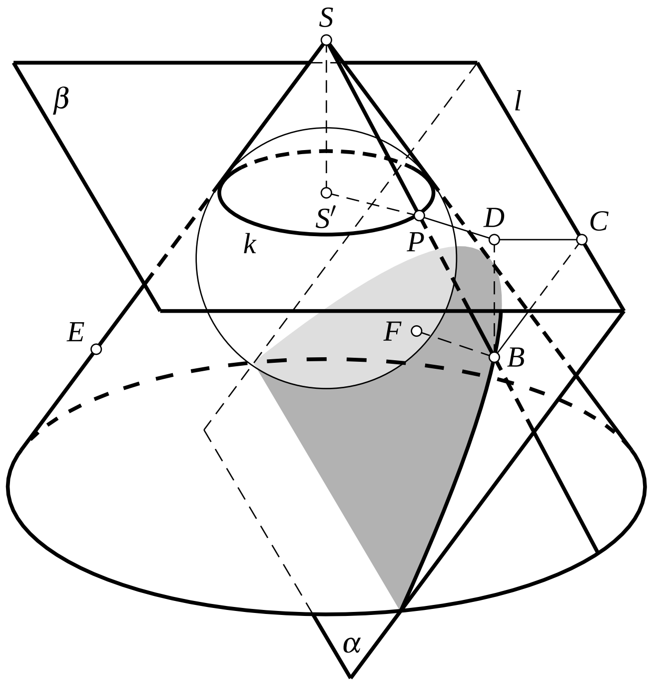
β ravan u kojoj leži krug k i neka se ravni α i β seku po pravoj l. Neka je B proizvoljna tačka na krivoj γ koja nastaje u preseku konusa $\mathscr{C}$ i ravni α. Dokažimo da je $[BF]$ podudarno rastojanju tačke B od prave l, odakle, po definiciji, sledi da je γ parabola. (Prema tome, $\mathscr{S}$ dodiruje ravan α tačno u fokusu, dok se ravni α i β seku tačno po direktrisi parabole!)

Neka izvodnica SB konusa $\mathscr{C}$ seče krug k u tački P. Duž $[BF]$ je tangentna duž na sferu $\mathscr{S}$ zato što leži u ravni α koja dodiruje sferu $\mathscr{S}$ u tački F. S druge strane, $[BP]$ je tangentna duž na sferu $\mathscr{S}$ zato što sfera $\mathscr{S}$ dodiruje konus po krugu k. Kako su sve tangentne duži iz date tačke na sferu podudarne, sledi da je $[BF] \cong [BP]$.

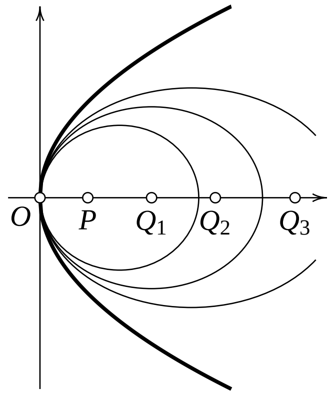
Neka je C podnožje normale iz tačke B na pravu l, i neka je D podnožje normale iz tačke B na ravan β. Pošto je BD paralelno osi konusa SS', a BC izvodnici SE, sledi da je ugao $\angle DBC$ jednak uglu $\angle S'SE$, što je polovina ugla koji predstavlja otvor konusa. S druge strane, očigledno je $\angle DBP$ jednak uglu $\angle S'SP$ jer su to uglovi sa paralelnim kracima. Kako je i $\angle S'SP$ polovina ugla koji predstavlja otvor konusa, sledi da je $\angle DBC$ jednak uglu $\angle DBP$. Dakle, trouglovi $\triangle DBC$ i $\triangle DBP$ su pravougli trouglovi koji imaju zajedničku katetu i imaju podudarne uglove nalegle na tu katetu. Zato je $\triangle DBC \cong \triangle DBP$, odakle zaključujemo da je $[BC] \cong [BP]$.

Dakle, $[BF] = [BP] = [BC]$. Ovim smo pokazali da za proizvoljno odabranu tačku B sa krive γ, imamo da je $[BF]$ podudarno rastojanju tačke B od prave l. Kako ni tačka F ni prava l ne zavise od izbora tačke P, sledi da je γ parabola kojoj je F fokus, a l direktrisa. ■

Parabola kao granični slučaj elipse i hiperbole. Posmatrajmo elipsu koja prolazi kroz koordinatni početak i čiji fokusi su u tačkama $P(p,0)$ i $Q(q,0)$, pri čemu je $0 < p < q$. Sada ćemo pokazati sledeće: ako fokus P fiksiramo, a fokus Q pustimo da teži ka $+\infty$, elipsa će konvergirati ka paraboli čiji fokus je tačka P. Odredimo, prvo, jednačinu elipse koja prolazi kroz koordinatni početak i čiji fo-



Slika 4.4: Parabola kao konusni presek



kusi su u tačkama P i Q. Lako se vidi da je centar elipse u tački $(a,0)$, gde je $a=\frac{q+p}{2}$ veća poluosa elipse. Rastojanje fokusa P i Q od centra elipse je $f=\frac{q-p}{2}$ pa je manja polusa elipse data sa $b=\sqrt{a^2-f^2}=\sqrt{pq}$. Jednačina ove elipse je

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

odakle, nakon množenja sa b^2 i sređivanja dobijamo jednačinu elipse u sledećem, ekvivalentnom, obliku:

$$y^2=\frac{-b^2}{a^2}x^2+\frac{2b^2}{a}x.$$

Kada je p fiksirano, a q teži ka $+\infty$, koeficijenti $\frac{-b^2}{a^2}$ i $\frac{2b^2}{a}$ se ponašaju na sledeći način:

$$\lim_{q\to+\infty}\frac{-b^2}{a^2}=\lim_{q\to+\infty}\frac{-4\frac{p}{q}}{\frac{p^2}{q^2}+2\frac{p}{q}+1}=0,$$

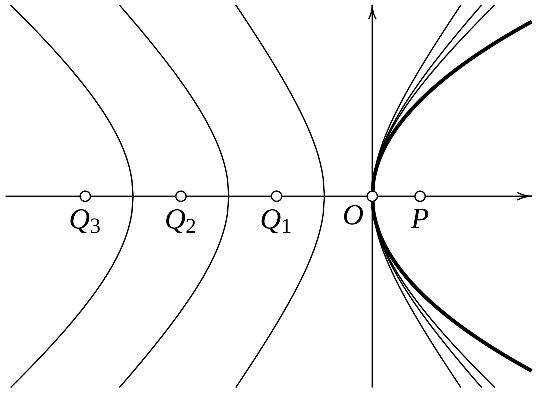
odnosno,

$$\lim_{q\to+\infty}\frac{2b^2}{a}=\lim_{q\to+\infty}\frac{4p}{\frac{p}{q}+1}=4p.$$

Prema tome, kako q teži ka $+\infty$, elipsa konvergira ka paraboli čija jednačina je $y^2=4px$.

Slično tvrđenje važi i za hiperbolu. Posmatrajmo hiperbolu koja prolazi kroz koordinatni početak i čiji fokusi su u tačkama $P(p,0)$ i $Q(q,0)$, pri čemu je $q<$

$0 < p$. Ako fokus P fiksiramo, a fokus Q pustimo da teži ka $-\infty$, hiperbola će konvergirati ka paraboli čiji fokus je tačka P. Dokaz ovog tvrđenja je analogan dokazu tvrđenja za elipsu i ostavljamo ga za vežbu.



4.7 Implementacija: Circle2D

U ovom odeljku ćemo pokazati kako se može implementirati krug kao ravanski geometrijski objekat. Klasa Circle2D opisuje krug na uobičajeni način: tačka C predstavlja centar kruga, dok broj r predstavlja njegov prečnik.

```
public class Circle2D {
  public double r;
  public Point2D C;

  public Circle2D(double x, double y, double r) {
    C = new Point2D(x, y); this.r = r;
  }

  public Circle2D(Point2D A, double r) {
    C = new Point2D(A); this.r = r;
  }
```

Metod K.inOrOut(P) vraća -1 ako je tačka P u unutrašnjosti kruga K, vraća 0 ako je tačka Pna kružnoj liniji, i vraća 1 ako je tačka P u spoljašnjosti kruga K.

```
  public int inOrOut(Point2D P){
    if(C.dist(P) < r) return -1;
    if(C.dist(P) == r) return 0;
    return 1;
  }
```

Metod K.intersection(L) određuje tačke preseka kruga K i prave L. Ako se krug i prava ne seku metod vrati null. U ostalim slučajevima metod vraća niz tačaka preseka. Očito je da će ovaj niz imati 1 ili 2 elementa. Presek prave i kruga se dobija rešavanjem kvadratne jednačine koja se dobija tako što se u jednačinu kruga K uvrsti parametarski oblik jednačine prave L.

```
public Point2D[] intersection(Line2D L) {
  double dx = L.B.x - L.A.x;  double cx = L.A.x - C.x;
  double dy = L.B.y - L.A.y;  double cy = L.A.y - C.y;
  double a = dx*dx + dy*dy;
  double b = 2.0*(cx*dx + cy*dy);
  double c = cx*cx + cy*cy - r*r;
  double d = b*b - 4.0*a*c;
  if(d < 0.0) return null;
  if(d == 0.0) {
    double t = -b/(2.0*a);
    Point2D[] rez = new Point2D[1];
    rez[0] = new Point2D(L.A.x + t*dx, L.A.y + t*dy);
    return rez;
  }
  double t1 = (-b - Math.sqrt(d))/(2.0*a);
  double t2 = (-b + Math.sqrt(d))/(2.0*a);
  Point2D[] rez = new Point2D[2];
  rez[0] = new Point2D(L.A.x + t1*dx, L.A.y + t1*dy);
  rez[1] = new Point2D(L.A.x + t2*dx, L.A.y + t2*dy);
  return rez;
}
```

Metod `Q.intersection(K)` određuje tačke preseka kruga Q i kruga K. Ako se krugovi ne seku metod vrati `null`. U ostalim slučajevima metod vraća niz tačaka preseka. Očito je da će ovaj niz imati 1 ili 2 elementa. Presek dva kruga se dobija rešavanjem sistema dve kvadratne jednačine koje predstavljaju jednačine ova dva kruga.

```
public Point2D[] intersection(Circle2D K) {
  double e1 = -2.0*C.x;
  double f1 = -2.0*C.y;
  double g1 = C.x*C.x + C.y*C.y - r*r;
  double e2 = -2.0*K.C.x;
  double f2 = -2.0*K.C.y;
  double g2 = K.C.x*K.C.x + K.C.y*K.C.y - K.r*K.r;
  double p = e2 - e1;
  double q = f2 - f1;
  double s = g2 - g1;
  if(p != 0.0) {
    double u = -q/p;
    double v = -s/p;
    double a = u*u + 1.0;
    double b = 2.0*u*v + e1*u + f1;
    double c = v*v + e1*v + g1;
    double d = b*b - 4.0*a*c;
    if(d < 0.0) return null;
    if(d == 0.0) {
      double y = -b/(2.0*a);
      double x = u*y + v;
      Point2D[] rez = new Point2D[1];
```

```
      rez[0] = new Point2D(x, y);
      return rez;
    }
    double y1 = (-b - Math.sqrt(d))/(2.0*a);
    double y2 = (-b + Math.sqrt(d))/(2.0*a);
    double x1 = u*y1 + v;
    double x2 = u*y2 + v;
    Point2D[] rez = new Point2D[2];
    rez[0] = new Point2D(x1, y1);
    rez[1] = new Point2D(x2, y2);
    return rez;
  }
  else if(q != 0.0) {
    // p == 0.0
    double v = -s/q;
    double c = v*v + f1*v + g1;
    double d = e1*e1 - 4.0*c;
    if(d < 0.0) return null;
    if(d == 0.0) {
      Point2D[] rez = new Point2D[1];
      rez[0] = new Point2D(-e1/2.0, v);
      return rez;
    }
    double x1 = (-e1 - Math.sqrt(d))/2.0;
    double x2 = (-e1 + Math.sqrt(d))/2.0;
    Point2D[] rez = new Point2D[2];
    rez[0] = new Point2D(x1, v);
    rez[1] = new Point2D(x2, v);
    return rez;
  }
  else return null;
}
```

Metod K.tangent(P) određuje tangente iz tačke P na krug K. Ukoliko se tačka P nalazi unutar kruga K metod vraća null. Ukoliko se tačka P nalazi na kružnoj liniji metod vrati niz dužine 1 koji sadrži pravu koja opisuje (jedinu) tangentu iz P na K. Konačno, ako se tačka P nalazi izvan kruga K metod vrati niz dužine 2 koji sadrži tangentne duži iz P na K, odnosno, odgovarajuće prave.

```
public Line2D[] tangent(Point2D P) {
  int k = inOrOut(P);
  if(k == -1) return null;
  if(k == 0) {
    Point2D Q = new Point2D(P);
    Q.translate(new Point2D(P.y - C.y, C.x - P.x));
    Line2D[] rez = new Line2D[1];
    rez[0] =  new Line2D(P, Q);
    return rez;
  }
  Circle2D K = new Circle2D(C.midpoint(P), C.dist(P)/2.0);
```

```
    Point2D[] Q = intersection(K);
    Line2D[] rez = new Line2D[Q.length];
    for(int i = 0; i < Q.length; i++)
      rez[i] =  new Line2D(P, Q[i]);
    return rez;
  }
```

Sledi niz metoda koji implementiraju primenu neke od transformacija podudarnosti na krug. Nismo implementirali primenu opšte afine transformacije na krug zato što se takvom transformacijom krug može preslikati, recimo, na elipsu.

```
  public void translate(Point2D P) {
    C.translate(P);
  }
  public void reflect(Point2D P) {
    C.reflect(P);
  }
  public void mirror(Line2D L) {
    C.mirror(L);
  }
  public void rot(Point2D P, double phi) {
    C.rot(P, phi);
  }
  public void scale(Point2D P, double coeff) {
    C.scale(P, coeff);
    r *= Math.abs(coeff);
  }
}
```

4.8 Zadaci

Krug.

1. Naći centar i poluprečnik kruga čija jednačina je:
   (a) $x^2+y^2-3x+5y-14=0$;
   (b) $x^2+y^2-10x+4y+4=0$;
   (c) $4x^2+4y^2+80x+12y+265=0$;
   (d) $2x^2+2y^2-12x-12y+30=0$;
   (e) $x^2+y^2+4x-6y+24=0$.

2. Ispitati položaj tačke $(1,-3)$ prema krugu
   (a) $x^2+y^2=1$;
   (b) $x^2+y^2-8x-4y-14=0$;
   (c) $x^2+y^2-8x+4y-8=0$.

3. Naći tačke preseka kruga $x^2+y^2-4x+4y+4=0$ sa koordinatnim osama.

4. Odrediti jednačinu kruga čiji centar je u tački $(5,-2)$, a koji prolazi kroz tačku $(-1,5)$.

5. Naći jednačinu kruga čiji prečnik je duž $[AB]$, gde je $A(5,-1)$ i $B(-3,7)$.

6. Naći jednačinu kruga čiji centar je na pravoj $x-y=0$, koji dodiruje koordinatne ose i ima poluprečnik 4.

7. Naći jednačinu kruga koji dodiruje x-osu u tački $(6,0)$ i koji sadrži tačku $(9,9)$.

8. Naći jednačinu kruga koji prolazi kroz tačke
   (a) $(5,3)$, $(6,2)$, $(3,-1)$;
   (b) $(1,4)$, $(-7,4)$, $(2,-5)$.

9. Naći jednačinu kruga opisanog oko trougla čije jednačine strana su $x+y=8$, $2x+y=14$, $3x+y=22$.

10. Naći jednačinu kruga koji prolazi kroz tačke $(2,3)$ i $(-1,1)$, a čiji centar se nalazi na pravoj $x-3y-11=0$.

11. Naći jednačinu kruga čiji centar je u tački $(-4,2)$ i koji dodiruje pravu $3x+4y-16=0$.

12. Naći jednačinu kruga upisanog u trougao čije jednačine strana su $2x-3y+21=0$, $3x-2y-6=0$, $2x+3y+9=0$.

13. Naći jednačinu kruga koji prolazi kroz tačku $(-2,1)$ i dodiruje pravu $3x-2y-6=0$ u tački $(4,3)$.

14. Naći jednačinu kruga koji prolazi kroz tačke $(1,2)$ i $(3,4)$ i dodiruje pravu $3x+y-3=0$.

15. Naći jednačinu kruga poluprečnika 5 koji dodiruje pravu $3x+4y-16=0$ u tački $(4,1)$.

16. Naći jednačinu kruga koji dodiruje prave $x+y+4=0$ i $7x-y+4=0$, a centar mu se nalazi na pravoj $4x+3y-2=0$.

17. Ispitati položaj date prave prema datom krugu:
    (a) $2x-y-3=0$, $x^2+y^2-3x+2y-3=0$;
    (b) $x-2y-1=0$, $x^2+y^2-8x+2y+12=0$;
    (c) $x-y+10=0$, $x^2+y^2-1=0$;

18. Naći jednačinu tangente kruga $x^2+y^2-2x+8y-23=0$
    (a) koja je konstruisana u njenoj tački $M(3,q)$, $q<0$;
    (b) čiji koeficijent pravca je 3;
    (c) koja prolazi kroz tačku $(8,-3)$.

19. Dat je krug $x^2+y^2+6x-8y=0$. U jednačini prave $3mx-3y=1$ odrediti skup vrednosti parametra m za koje
    (a) prava seče krug;
    (b) prava dodiruje krug;
    (c) prava nema zajedničkih tačaka sa krugom.

20. Dat je krug $x^2+y^2-10x+16=0$. U jednačini prave $y=kx$ odrediti skup vrednosti parametra k za koje
    (a) prava seče krug;
    (b) prava dodiruje krug;
    (c) prava nema zajedničkih tačaka sa krugom.

21. Tačka $(3,-1)$ je centar kruga koji na pravoj $2x-5y+18=0$ odseca tetivu dužine 6. Naći jednačinu ovog kruga.

22. Naći jednačinu prave koja na krugu $(x-1)^2+y^2=36$ odseca tetivu čije središte je tačka $(2,-\frac{1}{2})$.

23. Naći jednačine tangenata kruga $(x-5)^2+y^2=9$ iz koordinatnog početka.

24. Naći ugao pod kojim se krug $(x-3)^2+(y-2)^2=16$ vidi iz tačke $(8,0)$.

25. Naći jednačine tangenata kruga $x^2+y^2+10x-2y+6=0$ koje su paralelne sa pravom $2x+y=7$.

26. Naći jednačine tangenata kruga $x^2+y^2-2x+4y=0$ koje su normalne na pravu $x-2y+9=0$.

27. Naći jednačine tangenata kruga $x^2+y^2=5$ koje sa pravom $x+2y+1=0$ grade ugao od 45°.

28. Odrediti jednačinu kruga koji dodiruje prave $2x+y+4=0$ i $2x+y-16=0$ i prolazi kroz tačku $(5,2)$.

29. Ispitati uzajamni odnos krugova:
    (a) $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ i $x^2+y^2-10x-8y+40=0$;
    (b) $x^2+y^2-8x-18y+93=0$ i $x^2+y^2-8x-8y+23=0$;
    (c) $x^2+y^2=25$ i $2x^2+2y^2-4x-3y-25=0$;
    (d) $x^2+y^2-10x-20=0$ i $x^2+y^2+2x-4y-20=0$;
    (e) $x^2+y^2+8y+12=0$ i $x^2+y^2-2x+4y-20=0$;
    (f) $x^2+y^2-4x-2y-20=0$ i $x^2+y^2-4x-2y-4=0$.

30. Pod kojim se uglom seku krugovi $(x-2)^2+(y-1)^2=8$ i $(x-1)^2+(y+2)^2=2$?

31. Odrediti zajedničke tangente sledećih krugova:
    (a) $(x-2)^2+(y-2)^2=1$ i $(x-6)^2+(y-2)^2=4$;
    (b) $(x-3)^2+(y-3)^2=2$ i $(x-6)^2+(y-6)^2=8$;
    (c) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ i $(x-2)^2+(y-2)^2=1$.

Elipsa.

32. Naći jednačinu elipse sa centrom u koordinatnom početku
    (a) čije poluose su 5 i 2;
    (b) kod koje je rastojanje fokusa 6, a velika poluosa je 5;
    (c) kod koje je rastojanje fokusa 10, a zbir velike i male poluose je 25;
    (d) koja prolazi kroz tačke $(4,3)$ i $(6,2)$;
    (e) koja prolazi kroz tačku $(-2\sqrt{5},2)$ i čija mala poluosa je 3;
    (f) koja prolazi kroz tačku $(8,12)$, a rastojanje te tačke i levog fokusa je 20;
    (g) kod koje su rastojanja fokusa od krajeva velike ose 7 i 1;
    (h) kod koje se mala osa vidi iz fokusa pod uglom od 90°, a velika osa je $\sqrt{6}$;
    (i) kod koje je rastojanje fokusa jednako rastojanju dva susedna temena, a mala poluosa je 3.

33. Odrediti dužine poluosa i koordinate fokusa sledećih elipsi:
    (a) $9x^2+16y^2=576$;
    (b) $x^2+4y^2=16$;
    (c) $x^2+4y^2-2x-12y+1=0$;
    (d) $4x^2+y^2-16x+6y-11=0$;
    (e) $4x^2+9y^2-48x+72y+144=0$.

34. Odrediti položaj sledećih tačaka u odnosu na elipsu $25x^2+9y^2=225$: $A(1,2)$, $B(6,1)$, $C(-1,7)$, $D(\sqrt{3},5\sqrt{2/3})$.

35. Na elipsi $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ odrediti one tačke čije rastojanje od jednog fokusa je četiri puta veće od rastojanja do drugog fokusa.

36. Naći površinu četvorougla čija dva temena su fokusi, a druga dva temena krajevi male ose elipse $x^2+5y^2=20$.

37. Izračunati dužinu stranice kvadrata koji je upisan u elipsu $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

38. Neka je sa $E(a)$ označena elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-9}=1$. Dokazati da sve elipse $E(a)$ imaju iste fokuse, nezavisno od parametra a.

39. Neka je sa $E(k)$ označena elipsa $\frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{b^2+k}=1$. Dokazati da za $k>0$ sve elipse $E(k)$ imaju iste fokuse.

40. Odrediti međusobni položaj date prave i date elipse:
    (a) $2x-y-3=0$, $9x^2+16y^2=144$;
    (b) $2x+y-10=0$, $4x^2+9y^2=36$;
    (c) $3x+2y-20=0$, $5x^2+20y^2=200$.

41. Dati su prava $y=-x+m$ i elipsa $3x^2+2y^2=60$. Odrediti vrednosti parametra m za koje data prava seče, odnosno, dodiruje datu elipsu.

42. Naći jednačinu tangenata date elipse koje su paralelne datoj pravoj:
    (a) $9x^2+16y^2=144$, $x+y-1=0$;
    (b) $x^2+4y^2=10$, $3x+2y+7=0$;
    (c) $4x^2+5y^2=120$, $4x-2y+23=0$.

43. Naći jednačinu tangenata date elipse koje su normalne na datu pravu:
    (a) $x^2+4y^2=20$, $2x-2y-13=0$;
    (b) $3x^2+4y^2=120$, $2x-y+7=0$.

44. Na elipsi $4x^2+9y^2=72$ naći tačku koja je najbliža pravoj $2x-3y+25=0$.

45. Naći jednačine tangenti konstruisanih iz tačke $(10,-8)$ na elipsu $19x^2+25y^2=475$.

46. Naći jednačinu prave koja elipsu $4x^2+9y^2=22$ dodiruje u tački $(1,\sqrt{2})$.

47. Naći jednačinu elipse koja prolazi kroz tačku $(4,-1)$ i dodiruje pravu $x+4y-10=0$.

48. Naći jednačinu one tangente elipse $3x^2+4y^2=72$ koja sa koordinatnim osama obrazuje trougao površine 21.

49. Naći jednačinu elipse koja dodiruje prave $3x-2y-20=0$ i $x+6y-20=0$.

50. Naći zajedničke tangente elipsi $4x^2+5y^2=20$ i $5x^2+4y^2=20$.

51. Za krug $x^2+y^2=r^2$ i elipsu $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ znamo da je $a>r>b$ i da četiri tačke koje nastaju u njihovom preseku obrazuju kvadrat. Odrediti r u funkciji od a i b.

52. Odrediti geometrijsko mesto preseka tangenti date elipse koje su međusobno ortogonalne.

Hiperbola.

53. Odrediti jednačinu centralne hiperbole čije ose su paralelne kooridnatnim osama, pri čemu su ispunjeni sledeći uslovi:
    (a) jedno teme hiperbole je $(4,0)$, a fokus je u tački $(5,0)$;

(b) tačka $(4,\sqrt{3})$ leži na krivoj, a $(2,0)$ je jedno teme;
(c) tačke $(4,6)$ i $(1,1)$ leže na krivoj;
(d) jedan fokus je u tački $(13,0)$, a jedna asimptota je $2y = 3x$;
(e) jedno teme je u tački $(0,10)$, a jedna asimptota je $4y = 3x$;
(f) asimptote hiperbole se seku pod pravim uglom, a jedan fokus je u tački $(8,0)$;
(g) teme hiperbole polovi rastojanje između centra hiperbole i fokusa koji je bliži tom temenu, a rastojanje fokusa je 18;
(h) jedan fokus je $F(6,0)$, i $d(F,P) = 5$, gde je P tačka na hiperboli čija apscisa je 4.

54. Za svaku od sledećih hiperbola odrediti centar, fokuse, temena i asimptote:
(a) $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y = 29$;
(b) $9x^2 - y^2 + 36x + 6y + 18 = 0$;
(c) $3x^2 - 2y^2 - 18x - 8y + 1 = 0$;
(d) $2x^2 - 5y^2 - 20x + 18 = 0$;
(e) $y^2 - 2x^2 - 12x = 34$;
(f) $4y^2 - x^2 + 2x + 16y = 1$;
(g) $x^2 - y^2 - 8y = 48$;
(h) $x^2 - y^2 = 8y$.

55. Odrediti jednačinu hiperbole čije ose su paralelne koordinatnim osama i koje zadovoljavaju sledeće uslove:
(a) fokusi su u tačkama $(4,0)$ i $(10,0)$, a jedno teme je $(6,0)$;
(b) prolazi kroz sledeće četiri tačke: $(5,1)$, $(-3,-1)$, $(-3,1)$ i $(-2,\frac{1}{2}\sqrt{2})$.

56. Dokazati da su jednačinom $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 0$ predstavljene obe asimptote hiperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$.

57. Odrediti jednačine onih tangenti hiperbole $16x^2 - 25y^2 = 400$ koje su paralelne pravoj $2x - 2y = 5$.

58. Odrediti a i b tako da tangenta na hiperbolu $5x^2 - 2y^2 = 18$ u njenoj tački (a,b) prolazi kroz tačku $(1,-4)$.

59. Odrediti k tako da tangente na hiperbolu $x^2 - y^2 = 9$ čiji koeficijent pravca je k prolaze kroz tačku $(3,9)$.

60. Odrediti jednačine tangenti na hiperbolu $9x^2 - 25y^2 = 225$ iz tačke $(-6,-1)$.

61. Tangenta na centralnu hiperbolu seče asimptote hiperbole u tačkama A i B. Dokazati da proizvod $d(O,A)\cdot d(O,B)$ ne zavisi od izbora tangente.

62. Neka je A tačka na hiperboli i neka su P i Q podnožja normala iz A na asimptote hiperbole. Dokazati da proizvod $d(A,P)\cdot d(A,Q)$ ne zavisi od izbora tačke A.

63. Posmatrajmo hiperbolu čije asimptote su ortogonalne. Prava koja prolazi kroz fokus F ove hiperbole i paralelna je jednoj asimptoti seče hiperbolu u tački G. Odrediti $d(F,G)$.

64. Prava kroz dve proizvoljne tačke Q i R na hiperboli seče asimptote te hiperbole u tačkama P i S. Pokazati da se središta duži $[PS]$ i $[QR]$ poklapaju. Zaključiti odatle da je $[PQ] \cong [RS]$.

65. Geometrijsko mesto centra kruga koji dodiruje dva data kruga k_1 i k_2 je hiperbola čiji fokusi su centri krugova k_1 i k_2. Dokazati.

66. Naći geometrijsko mesto centra kruga koji koordinatne ose seče po dužima konstantne dužine $2a$, odnosno, $2b$.

67. Neka je $E(k)$ kriva opisana jednačinom $\dfrac{x^2}{a^2+k}+\dfrac{y^2}{b^2+k}=1$. Dokazati sledeće:
    (a) sve krive $E(k)$ imaju iste fokuse;
    (b) ako je $a^2=4$ i $b^2=1$, kroz tačku $(2,1)$ prolaze tačno dve krive oblika $E(k)$: jedna od njih je hiperbola, a druga elipsa;
    (c) krive iz (b) su ortogonalne (što znači, po definiciji, da su njihove tangente u svakoj tački preseka ortogonalne).

68. Date su tačke $A(3,0)$ i $B(-3,0)$.
    (a) Odrediti geometrijsko mesto tačaka P sa osobinom $\angle ABP = 2\angle PAB$.
    (b) Pokazati kako se, ako nam je unapred data kriva iz (a), može konstruktivno rešiti problem trisekcije ugla.

Parabola.

69. Za svaku od sledećih parabola odrediti koordinate temena i fokusa:
    (a) $y2-2y-3x-2=0$;
    (b) $x^2+4x-4y=0$;
    (c) $x^2-4x+3y+1=0$;
    (d) $3x^2-6x-y=0$;
    (e) $8y^2-16y+x+6=0$;
    (f) $y^2+y+x=0$.

70. Odrediti jednačinu parbole ako su dati jednačina direktrise i fokus:
    (a) $l: x-4=0$, $F(6,-2)$;
    (b) $l: y+3=0$, $F(0,0)$;
    (c) $l: 2x+5=0$, $F(0,-1)$;
    (d) $l: x=0$, $F(2,-3)$;
    (e) $3y-1=0$, $F(-2,1)$;
    (f) $x-2a=0$, $F(a,b)$.

71. Naći jednačinu parabole ako su dati njeno teme T i fokus F:
    (a) $T(-3,2)$, $F(-3,5)$;
    (b) $T(-3,5)$, $F(-3,2)$;
    (c) $T(2,5)$, $F(-1,5)$;
    (d) $T(-1,5)$, $F(2,5)$.

72. Naći jednačinu parabole:
    (a) čija osa je paralelna x-osi, a koja sadrži sledeće tačke: $(1,0)$, $(5,4)$, $(10,-6)$;
    (b) čija osa je paralelna y-osi, a koja sadrži sledeće tačke: $(0,0)$, $(-2,1)$, $(6,9)$.

73. Odrediti jednačinu parabole čija osa je paralelna x-osi i koja sadrži nekolinearne tačke $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ i $P_3(x_3,y_3)$. (Uputstvo: Jednačinu potražiti u obliku determinante.)

74. Odrediti jednačine tangenti na parabolu $y^2=8x$ iz tačke:
    (a) $(-2,3)$;
    (b) $(-2,0)$;
    (c) $(-6,0)$;
    (d) $(8,8)$.

75. Odrediti jednačinu tangente na parabolu $y^2 = 3x$ koja sa pozitivnim smerom x-ose zaklapa ugao od:
    (a) 30°;
    (b) 45°.

76. Odrediti tangente na parabolu $y^2 = 4px$ iz tačke $(-p, 0)$.

77. Dokazati da su tangente na parabolu $y^2 = 4px$ iz bilo koje tačke njene direktrise ortogonalne.

78. Odrediti geometrijsko mesto centara krugova koji prolaze kroz tačku $(0,2)$ i dodiruju pravu $y = 0$.

79. Odrediti geometrijsko mesto centara krugova koji dodiruju pravu $x = 0$ i krug $(x-3)^2 + y^2 = 1$.

80. Neka su a i b ortogonalne prave koje se seku u temenu parabole, i neka su A i B druge tačke preseka ovih pravih sa parabolom. Dokazati da duž $[AB]$ seče osu parabole u tački koja ne zavisi od izbora ortogonalnih pravih a i b.

81. Pod kojim uglom se seku parabole $y^2 = 4px$ i $x^2 = 4py$? (Uputstvo: Ugao pod kojim se seku dve krive je ugao koga zaklapaju tangente na te dve krive u tački preseka.)

Razno.

82. Neka je F jedan fokus elipse $\mathscr{E}$. Dokazati da postoje prava l i realan broj r takvi da za proizvoljnu tačku X ravni važi sledeće: $X \in \mathscr{E}$ ako i samo ako je $\dfrac{d(X,F)}{d(X,l)} = r$. (Napomena: prava l je ortogonalna na pravu koja sadrži veću poluosu elipse. Ova prava se zove *direktrisa* elipse koja odgovara fokusu F. Kako elipsa ima dva fokusa, svaki od njih ima svoju direktrisu.)

83. Neka je F jedan fokus hiperbole $\mathscr{H}$. Dokazati da postoje prava l i realan broj r takvi da za proizvoljnu tačku X ravni važi sledeće: $X \in \mathscr{H}$ ako i samo ako je $\dfrac{d(X,F)}{d(X,l)} = r$. (Napomena: prava l je ortogonalna na pravu koja sadrži realnu poluosu hiperbole. Ova prava se zove *direktrisa* hiperbole koja odgovara fokusu F. Kako hiperbola ima dva fokusa, svaki od njih ima svoju direktrisu.)

84. Neka je $\mathscr{C}$ uspravan kružni cilindar (dakle, beskonačna površ koju čine sve tačke prostora čija ortogonalna projekcija pada na unapred datu kružnu liniju) i neka je α ravan koja seče cilindar $\mathscr{C}$ ali tako da se u preseku ne dobija ni prava ni krug. Dokazati da se tada se u preseku ravni α i cilindra $\mathscr{C}$ dobija elipsa.

85. Posmatrajmo hiperbolu koja prolazi kroz koordinatni početak i čiji fokusi su u tačkama $P(p,0)$ i $Q(q,0)$, pri čemu je $q < 0 < p$. Ako fokus P fiksiramo, a fokus Q pustimo da teži ka $-\infty$, hiperbola će konvergirati ka paraboli čiji fokus je tačka P. Dokazati.

Literatura

[1] Agnew, Ralph Palmer. *Calculus: Analytic Geometry and Calculus, with Vectors.* McGraw-Hilt Book Company, Inc. 1962.

[2] Axler, Sheldon. *Linear Algebra Done Right.* Springer, 1997.

[3] Bilinski, Stanko. *Analitička geometrija s uvodom u linearnu algebru.* Sveučilište u Zagrebu, 1963.

[4] Lang, Serge. *Linear Algebra.* Springer, 1987.

[5] Lay David C.; Lay, Steven R.; McDonald, Judi J. *Linear Algebra and Its Applications.* Pearson 2016.

[6] Lin, Yixiong. *Geometric linear algebra.* World Scientific, 2005.

[7] Lipkovski, Aleksandar. *Linearna algebra i analitička geometrija.* Naučna knjiga Beograd, 1995.

[8] Mitrinović, Dragoslav S. *Linearna algebra, polinomi, analitička geometrija.* Građevinska knjiga Beograd, 1968.

[9] Neri, Ferrante. *Linear Algebra for Computational Sciences and Engineering.* Springer, 2016.

[10] Prvanović, Stanko. *Analitička geometrija u ravni.* Naučna knjiga Beograd, 1958.

[11] Saltikov, N. *Analitička geometrija, I.* Prosveta Beograd, 1947.

[12] Saltikov, N. *Analitička geometrija, II.* Prosveta Beograd, 1949.

[13] Shifrin, Theodore; Adams, Malcolm R. *Linear Algebra: A Geometric Approach.* W. H. Freeman and Company New York, 2011.

[14] Siceloff, Lewis Parker; Wentworth, George; Smith, David Eugene. *Analytic Geometry.* Ginn and Company, 1922.

[15] Solomon, Bruce. *Linear Algebra: Geometry and Transformation.* CRC Press Taylor & Francis Group, 2015.

[16] Stojaković, Zoran; Herceg, Dragoslav. *Linearna algebra i analitička geometrija.* Institut za matematiku, Novi Sad, 1992.

[17] Ziwet, Alexander; Hopkins, Louis Allen. *Analytic Geometry and Principles of Algebra.* The MacMillan Company 1913.

Indeks