



Univerzitet u Novom Sadu,
Prirodno-matematički fakultet,
Departman za fiziku

Primena semi-Lagranževe advektivne šeme na modelovanje pasivne advekcije na sferi

Master rad

Autor: Velibor Želi

Mentor: prof. dr Milica Pavkov-Hrvojević

Novi Sad, 29. septembar 2015

Ovim putem želeo bih da izrazim svoju zahvalnost dr Iliji Arseniću na ukazanoj pomoći pri odabiru teme i izradi ovog master rada.

Međutim, bez podrške porodice ovaj master rad ne bi bio moguć, kao ni bez Brankice koja je imala strpljenja za mene tokom ovih poslednjih par godina. Vaš doprinos je u ovom radu možda neprimetan ali ujedno i nesamerljiv.

Velibor Želi, septembar 2015.

Sadržaj

1	Teorijski uvod	4
1.1	Advekcija	4
1.1.1	Ojlerov pristup za problem advekcije	5
1.1.2	Lagranžev pristup za problem advekcije	7
1.2	Semi-Lagranžev pristup za problem advekcije	7
1.3	Određivanje trajektorije delića vazduha	11
1.3.1	Trajektorije u ravni	11
1.3.2	Trajektorije na površini sfere	13
1.4	Interpolacija	16
1.4.1	Lagranžev interpolacioni polinom	16
2	Numerički testovi	19
2.1	Numerički testovi u ravni	19
2.2	Numerički testovi na površini sfere	21
3	Zaključak	33
	Dodatak	34
A	Jednačine za trajektorije na sferi	35
B	Definisanje polja vetra na sferi	36

Slike

2	Šematski prikaz uzvodne SL advektivne šeme sa tri nivoa [1]. Prava trajektorija (puna linija) i aproksimirana trajektorija (isprekidana linija) delića koji pristiže u čvor mreže x_m u trenutku vremena $t_n + \Delta t$	8
3	Oblik polja vetra koji advektira fluid u ravni. Ilustrativno, slika prikazuje oblast 21×21 tačka, dok u modelu ima 51×51 .	20
4	Inicijalna vrednost polja temperature u testu rotirajućeg cilindra ($n_t = 0$), vrednost polja temperature je svuda 0°C osim u okviru cilindra gde je vrednost 1°C	22
5	Gornja slika predstavlja rezultate uzvodne SL advektivne šeme nakon perioda pune rotacije ($n_t=262$) pri korišćenju bikubne interpolacije u svakom vremenskom koraku za određivanje polja vetra i polja temperature.	23
6	Gornja slika predstavlja rezultate uzvodne SL advektivne šeme nakon perioda pune rotacije ($n_t=262$) pri korišćenju bilinearne interpolacije u svakom vremenskom koraku za određivanje polja vetra i polja temperature.	24
7	Rezultati uzvodne SL advektivne šeme za test rotirajućeg cilindra. Trajektorije su računate pomoću egzaktnih izraza za rotaciju cilindra, a korišćena je bikubna interpolaciona metoda.	25
8	Inicijalno polje temperature ima oblik prstena koji se nalazi na ekvatoru, vrednost polja van oblasti ekvatora je 0°C . Perspektiva leve slike: ($\lambda = 0^\circ, \theta = 40^\circ$), perspektiva desne slike: ($\lambda = 70^\circ, \theta = 20^\circ$).	28
9	Rezultati uzvodne SL advektivne šeme na sferi pri korišćenju bikubne interpolacije za tri različita vremenska trenutka (n_t) iz perspektive ($\lambda = 0^\circ, \theta = 40^\circ$).	29
10	Rezultati uzvodne SL advektivne šeme na sferi pri korišćenju bikubne interpolacije za tri različita vremenska trenutka (n_t) iz perspektive ($\lambda = 70^\circ, \theta = 20^\circ$).	30
11	Rezultati uzvodne SL advektivne šeme na sferi pri korišćenju bilinearne interpolacije za tri različita vremenska trenutka (n_t) iz perspektive ($\lambda = 0^\circ, \theta = 40^\circ$).	31
12	Rezultati uzvodne SL advektivne šeme na sferi pri korišćenju bilinearne interpolacije za tri različita vremenska trenutka (n_t) iz perspektive ($\lambda = 70^\circ, \theta = 20^\circ$).	32

Sažetak

Pasivna advekcija je jedan od centralnih procesa u meteorologiji. Kretanja vazduha u atmosferi dovodi do preraspodele i deformacije polja različitih veličina u atmosferi (temperature, vlage, koncentracije aerosola, itd.) samim tim što vazduh koji se premešta sa sobom nosi sve svoje osobine. Različiti pristupi iz mehanike fluida su korišćeni za rešavanje ovog problema, ali se pokazalo da svaki ima svoje prednosti i svoje mane. Opisana su dva najčešće korišćena pristupa za rešavanje problema pasivne advekcije: Ojlerov i Lagranžev pristup. Međutim kao što će biti objasnjeno oba pristupa imaju svoje nedostatke koji se mogu prevazići korišćenjem semi-Lagranževog (SL) pristupa. SL advektivna šema koristi dobre osobine Ojlerovske šeme, pravilnu mrežu tačaka, i Lagranžev pristup računanja trajektorija dolaznih tačaka. Na ovaj način pokazano je da korišćenjem SL advektivne šeme mogu se dobiti dobri rezultati pasivne advekcije u slučaju kada je narušen CFL (*Cournat-Friedrich-Levi*) kriterijum, koji je osnovni uslov stabilnosti u Ojlerovskom pristupu modelovanja advekcije, a ujedno je i glavni nedostatak ovog pristupa.

1 Teorijski uvod

1.1 Advekcija

Meteorologija je naučna disciplina koja u svom domenu ima značajan presek sa fizikom fluida, fizikom kontinuuma, time što je centralna tema meteorologije proučavanje fizičkih zakona u fluidu. Neprestana dinamika u atmosferi, čiji je pokretač energija Sunca, dovodi do kretanja vazduha na većim ili manjim prostornim razmerima usled čega se transportuju različite fizičke veličine u atmosferi (temperatura, vlaga, pritisak, koncentracija aerosola, itd.) koje dalje imaju veliki uticaj na budući razvoj vremenske situacije. U realnom slučaju, kretanje vazduha u atmosferi se odvija u tri dimenzije. Međutim zbog značajne razlike u intenzitetu brzine kojom se vazduh kreće u horizontalnom pravcu ($\sim \text{m s}^{-1}$) u odnosu na kretanje u vertikalnom pravcu ($\sim \text{cm s}^{-1}$), pri analiziranju kretanja u atmosferi razlikujemo horizontalno

kretanje vazduha u odnosu na vertikalno kretanje. Horizontalno kretanje se naziva *advekcija*, dok se vertikalno kretanje naziva *konvekcija*. U problemima koji se razmatraju u meteorologiji, molekularna struktura atmosfere se može zanemariti i atmosfera se tada posmatra kao kontinualna sredina, kontinuum [5]. U kontinualnoj sredini jedan delić atmosfere, elementarna zapremina atmosfere, predstavlja najmanji deo atmosfere koji idalje ima sve osobine cele atmosfere, to znači da svaki delić ima jedinstvene osobine (koordinate, temperaturu, količinu vlage, količinu aerosola, itd.) koje definišu vrednost polja na mestu gde se delić nalazi. Ovakav pristup problemu omogućava izvođenje osnovnih zakona mehanike fluida u vidu parcijalnih diferencijalnih jednačina koje opisuju kretanja u atmosferi, a samim tim su ove jednačine povezane i sa distribucijom polja različitih veličina u atmosferi. U ovom radu, pažnja je posvećena procesu *pasivne advekcije* što predstavlja preraspodelu polja neke veličine prilikom kretanja vazduha a da pri tome ne postoji povratna sprega između rezultata advektovane veličine i polja brzine vetra.

1.1.1 Ojlerov pristup za problem advekcije

Postoje različiti matematički pristupi koji rešavaju problem advekcije. Najpoznatiji su Ojlerov pristup i Lagranžev pristup. Ojlerov pristup podrazumeva da su prostorne i vremenske koordinate međusobno nezavisne pa je u tom slučaju neophodno da računске tačke budu nepokretne u prostoru. Ako se posmatra delić zapremine čije se koordinate ne menjaju, delić koji je fiksiran u prostoru, sa stranicama dx , dy , dz može se izvesti izraz za promenu fizičke veličine, ψ , unutar zapremine tog delića usled kretanja fluida brzinom u , v , w u pravu x , y , z ose respektivno. Krenimo od izraza za totalni diferencijal ove fizičke veličine $d\psi$, izraz (1).

$$d\psi(t, x, y, z) = \frac{\partial\psi}{\partial t}dt + \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz \quad (1)$$

Deljenjem izraza (1) sa dt , dobija se izraz za *ukupnu promenu* veličine ψ u vremenu (2).

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (2)$$

Uočimo da članovi $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ predstavljaju brzine u pravu x , y , z ose respektivno, a da promena $\frac{d\psi}{dt}$ nema isto značenje kao što ima promena $\frac{\partial\psi}{\partial t}$. Korišćenjem vektorskog zapisa $\mathbf{V} = u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}} + w\hat{\mathbf{k}}$ u izrazu (2), dati izraz se može dovesti do forme izraza (3).

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial(\psi u)}{\partial x} + \frac{\partial(\psi v)}{\partial y} + \frac{\partial(\psi w)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \mathbf{V}) \end{aligned} \quad (3)$$

Izraz (3) opisuje ukupnu promenu neke veličine, ψ . *Ukupna promena* veličine ψ je rezultat *lokalne promene* u fiksiranim koordinatama na mestu gde se delić nalazi, $\frac{\partial\psi}{\partial t}$, i *advekcije* polja posmatrane veličine, $\nabla \cdot (\psi \mathbf{V})$, odnosno koliko se veličine ψ dovede u/odvede iz zapemine delića. Ukoliko se zanemari lokalna promena veličine, jasno je da se posmatra proces “čiste advekcije” jer je ukupna promena ψ u vremenu jednaka količini ψ koja uđe, odnosno izađe iz delića.

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial(\psi u)}{\partial x} + \frac{\partial(\psi v)}{\partial y} \quad (4)$$

Diferencijalna jednačina (4) predstavlja standardnu formu izraza za advekciju posmatrane veličine u slučaju Ojlerovog pristupa. Uočimo da je ukupna promena posmatrane veličine, u nekoj fiksiranoj zapremini, jednaka transportu veličine ψ u pravcu x i y ose, i to tako da transport veličine ψ može biti pozitivan $\frac{\partial(\psi u)}{\partial x}, \frac{\partial(\psi v)}{\partial y} > 0$ kada više ψ pristigne u zapreminu nego što iz nje ode, ili negativan $\frac{\partial(\psi u)}{\partial x}, \frac{\partial(\psi v)}{\partial y} < 0$ kada iz zapremine delića više ode ψ nego što pristigne. Uprošćen oblik diferencijalne jednačine (4), u slučaju jednodimenzionog problema, u opštem slučaju nije analitički rešiv. Iz tog razloga se diferencijalna jednačina (4) mora rešavati odabirom odgovarajuće numeričke šeme, što ima dalje posledice na konačan rezultat.

1.1.2 Lagranžev pristup za problem advekcije

U slučaju Lagranževog pristupa problemu advekcije prostorne i vremenske koordinate su međusobno zavisne, tj. kako vreme prolazi delić menja svoje koordinate i kreće se kroz prostor. Međutim korisna osobina Lagranževog pristupa u rešavanju problema advekcije je da diferencijalna jednačina koja opisuje proces pasivne advekcije, izraz (5), ima jednostavniji oblik nego u slučaju Ojlerovog pristupa.

$$\frac{d\psi}{dt} = 0 \quad (5)$$

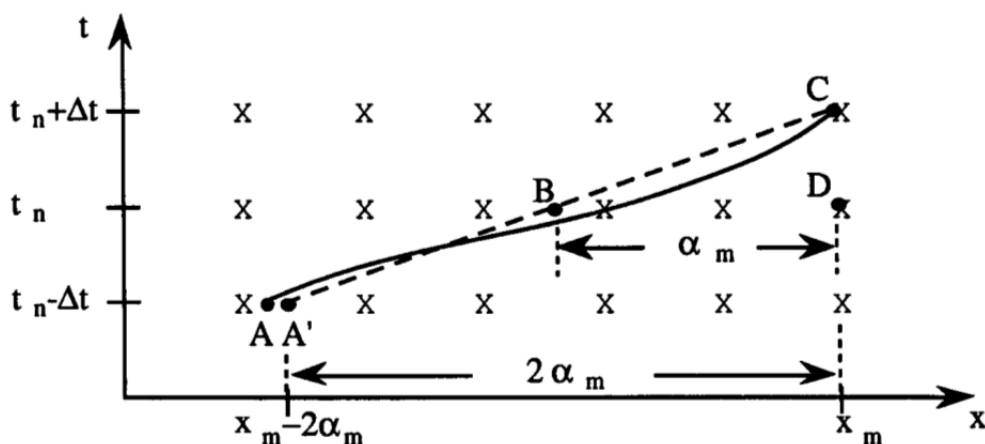
Ovako jednostavan oblik diferencijalne jednačine ima za rešenje $\psi = \text{const}$, što znači da usled pasivne advekcije ne dolazi do promene ψ u posmatranom deliću tokom vremena. Međutim ispostavlja se da Lagranžev pristup za rešavanje problema pasivne advekcije u atmosferi nije jednostavno implementirati. Pojavljuju se komplikacije kada se prate delići u atmosferi pušteni iz čvorova pravilne mreže tačaka, nakon samo nekoliko koraka, formira se nepravilna mreža tačaka [8] i tada se javlja problem interpolacije sa nepravilne mreže tačaka na pravilnu mrežu.

1.2 Semi-Lagranžev pristup za problem advekcije

Pri korišćenju Ojlerovog pristupa za rešavanje problema pasivne advekcije posmatrač se nalazi u fiksiranoj tački (x_0, y_0, z_0) i odatle posmatra promene. Korišćenjem Ojlerove advektivne šeme uspešno se rešava problem pasivne advekcije u oblasti pravilno raspoređene mreže tačaka. Ova šema međutim ima nedostatak da je numerička stabilnost rešenja, diferencijalne jednačine (4), uslovljena CFL (*Courant-Friedrich-Levi*) kriterijumom [4], tj. vremenski korak Δt , korak mreže Δx i maksimalna brzina vetra u su povezani pomoću nejednačine:

$$\max \left(\frac{u\Delta t}{\Delta x} \right) \leq 1$$

u kojoj se direktno ograničava izbor dužine koraka u vremenu, Δt , tako da delić vazduha, tokom jednog vremenskog koraka, ne sme preći rastojanje veće od jednog koraka mreže. Korišćenjem Lagranževog pristupa pri reša-



Slika 2: Šematski prikaz uzvodne SL advektivne šeme sa tri nivoa [1].

Prava trajektorija (puna linija) i aproksimirana trajektorija (isprekidana linija) delića koji pristiže u čvor mreže x_m u trenutku vremena $t_n + \Delta t$.

vanju problema pasivne advekcije posmatrač je fiksiran za delić u pokretu $(x(t), y(t), z(t))$ i na taj način posmatra promene koje se odvijaju dok se kreće zajedno sa delićem. U Lagranževoj advektivnoj šemi, korak u vremenu može da bude znatno duži nego u Ojlerovskim advektivnim šemama [1], međutim kao što je već napomenuto veliki nedostatak ovih šema je što pravilna mreža tačaka sa početka vremenske integracije već nakon prvog vremenskog koraka postaje nepravilna. Pod pojmom *nepravilna mreža* podrazumevamo da tačke ne samo da više neće ležati u čvorovima pravilne mreže već i one tačke koje su bile najbliži susedi na početku integracije posle svega nekoliko koraka to više neće biti. Da bi se izbegle negativne posledice pomenutih advektivnih šema, koristi se kombinacija Ojlerovog i Lagranževog pristupa: (1) regularna mreža tačaka u svakom vremenskom koraku i (2) računanje trajektorija kao što je to u Lagranževom pristupu da bi se na taj način povećala stabilnost rešenja. Ovo se postiže na taj način što je na početku svakog vremenskog koraka potrebno izabrati drugačiji set tačaka koje će nakon jednog koraka u vremenu, Δt , pristići u tačku mreže. Kako bi što jasnije prikazali osnovne ideje posmatraćemo jednodimenzioni slučaj advekcije pasivnog skalara, ψ , kao što je prikazano na Slici 2.

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{d\psi}{dx} = 0 \quad (6)$$

Ispunjen je uslov da $x(t)$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu $\frac{dx}{dt} = u(x, t)$ a izraz (6) obezbeđuje da skalarna vrednost ψ ostaje nepromenjena duž trajektorije delića. Na Slici 2, sa punom krivom linijom AC, prikazana je trajektorija delića u $(x-t)$ ravni, koji pristiže u tačku x_m u vremenskom trenutku $t_n + \Delta t$. Isprekidanom linijom, A'C, na istoj slici, je prikazana aproksimirana pravolinijska trajektorija. Pretpostavimo da su nam poznate vrednosti funkcije ψ u svim tačkama mreže na vremenskim nivoima t_n i $t_n - \Delta t$ i da želimo da odredimo vrednosti u istim tačkama na vremenskom nivou $t_n + \Delta t$. Suština SL pristupa je da se jednačina (6) integrali duž aproksimirane trajektorije AC. Na taj način se dobija

$$\frac{\psi(x_m, t_n + \Delta t) - \psi(x_m - 2\alpha_m, t_n - \Delta t)}{2\Delta t} = 0 \quad (7)$$

gde je α_m rastojanje BD koje delić pređe za vreme Δt krećući se po aproksimiranoj prostorno-vremenskoj trajektoriji A'C. Ovo znači da ukoliko nam je poznata vrednost α_m , tada je vrednost funkcije ψ u dolaznoj tački, x_m , u vremenskom trenutku $t_n + \Delta t$ jednaka vrednosti funkcije ψ u odlaznoj tački $x_m - 2\alpha_m$ u trenutku $t_n - \Delta t$. Pomeranje delića, α_m , kao što se vidi sa Slike 6, se određuje na osnovu brzine izračunate u tački B na vremenskom nivou t_n . Uočimo da je brzina delića u tački B jednaka recipročnoj vrednosti nagiba prave A'C. Ovo obezbeđuje, da na ovaj način aproksimirana jednačina (7), ima tačnost drugog reda u vremenu, $O(\Delta t^2)$. Dakle pređenu put delića se određuje pomoću

$$\alpha_m = \Delta t u(x_m - \alpha_m, t_n) \quad (8)$$

Jednačina (8) se može rešiti iterativno, na primer upotrebom algoritma:

$$\alpha_m^{(k+1)} = \Delta t u(x_m - \alpha_m^{(k)}, t_n) \quad (9)$$

sa nekom inicijalnom vrednošću, α_m^0 . Tačnost određivanja trajektorije ima presudan uticaj na tačnost čitavog modela. Uočimo da je prilikom primene (9) tokom rešavanja (8), kao i prilikom primene (7) potrebno odrediti vred-

nost funkcije, ψ , kao i brzine, u , u tačkama koje ne pripadaju pravilnoj mreži. Ovo se postiže primenom neke interpolacione procedure. Tačnost primenjene interpolacije ima, takođe, presudan uticaj na tačnost čitavog modela. Šta više, nemogućnost primene efikasne interpolacije na pomenuti potpuno nepravilan raspored tačaka je uticala da se napusti potpuno Lagranževski pristup. Rezimirajmo opisani postupak kao algoritam koji se sastoji od tri koraka:

1. Određuje se pomeranje delića, α_m , recimo, iterativnim postupkom (9) za sve tačke, x_m , uz primenu neke interpolacione procedure prilikom evaluacije brzine, u , u odlaznim tačkama.
2. Upotrebom interpolacione procedure određuje se vrednost funkcije, ψ , u svim polaznim tačkama, $x_m - 2\alpha_m$, na vremenskom nivou, $t_n - \Delta t$.
3. Upotrebom (7) određuje se vrednost funkcije, ψ , u svim dolaznim tačkama x_m , na vremenskom nivou, $t_n + \Delta t$, na taj način što se vrednost $\psi(x_m, t_n + \Delta t)$ izjednači sa vrednosti $\psi(x_m - 2\alpha, t_n - \Delta t)$.

Opisana advektivna šema se u semi-Lagranževskoj nomenklaturi klasifikuje kao *uzvodna SL šema sa tri nivoa*. Uzvodna, jer se odlazne tačke nalaze uzvodno u odnosu na dolazne a sa tri nivoa jer su u šemu uključene vrednosti funkcije i brzine sa tri vremenska nivoa.

Numerička stabilnost SL šeme je, kao što je već napomenuto, značajno veća u odnosu na Ojlerovske šeme i može da bude procenjena analizom konvergencije iterativnog postupka (9). Pokazano je da iterativni postupak (9) konvergira ako je vremenski korak manji od recipročne vrednosti maksimalnog smicanja vetra u bilo kom koordinatnom pravcu [6]. Ovaj kriterijum stabilnosti može da se zapiše u obliku

$$\Delta t \leq \frac{1}{\max(|\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}|)} \quad (10)$$

Ovaj uslov stabilnosti u stvari predstavlja zahtev da se trajektorije delića vazduha tokom jednog vremenskog koraka ne presecaju. U realnim meteorološkim situacijama (10) dozvoljava vremenske korake do šest puta duže

od onih dozvoljenih CFL kriterijumom [7]. Ova osobina SL šema je njihova glavna prednost u odnosu na Ojlerovske šeme i razlog njihove široke primene modelovanja advekcije. Međutim SL imaju nekoliko ozbiljnih nedostataka. Prvi od njih je svakako to što one nisu konzervativne bilo da se radi o masi bilo nekoj drugoj konzervativnoj atmosferskoj veličini kao što su energija, količina kretanja ili vrtložnost. Ovaj nedostatak SL šema može da bude umanjen upotrebom nekih metoda, međutim one neće biti opisane jer prevazilaze obim ovog master rada.

1.3 Određivanje trajektorije delića vazduha

Kao što je napomenuto u prethodnom poglavlju, određivanje trajektorije delića ima presudan značaj kako za stabilnost SL šema tako i za njihovu tačnost. U ovom poglavlju ćemo, stoga, dati prikaz nekoliko najčešće korišćenih metoda za rešavanje ovog problema. Prvo ćemo prikazati metode koji omogućavaju proračun trajektorije delića u ravnoj geometriji da bismo na kraju prikazali način kako se trajektorije određuju u sfernoj geometriji u kojoj se javlja problem polova.

1.3.1 Trajektorije u ravni

Jedan od jednostavnijih problema modelovanja pasivne advekcije pomoću SL advektivne šeme je u slučaju rešavanja problema pasivne advekcije u ravni. Međutim pored jednostavnosti, ovaj problem je izuzetno pogodan da se na njemu ilustruje, prethodno opisan, način primene SL advektivne šeme. Kao što je napomenuto, računanje trajektorije je izuzetno važan korak u uzvodnoj SL advektivnoj šemi jer se time obezbeđuje traženje odgovarajuće tačke koja će u sledećem koraku pristići u posmatranu tačku mreže. Matematički gledano to predstavlja integraciju diferencijalne jednačine (11).

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (11)$$

U izrazu (11) je sa \mathbf{v} predstavljen vektor brzine delića dok je \mathbf{r} njegov vektor položaja. Razmotrimo problem šeme sa dva vremenska nivoa u kojima se

podrazumeva da na vremenskom nivou (n) delić odlazi iz tačke gde je vektor položaja $\mathbf{r}^{(n)}$ (*odlazna tačka*) i na sledećem vremenskom nivou (n+1) pristiže u tačku čiji je vektor položaja $\mathbf{r}^{(n+1)}$ (*dolazna tačka*). U slučaju *uzvodne SL advektivne šeme* sa dva nivoa, dolazne tačke se biraju na taj način da formiraju pravilnu mrežu, tj. da svi vektori $\mathbf{r}^{(n+1)}$ budu već unapred poznati. U ovom slučaju problem se svodi na određivanje položaja odlaznih tačaka $\mathbf{r}^{(n)}$, za koje je jasno da se ne nalaze u čvorovima pravilne mreže tačaka. Za razliku od ovako definisane SL advektivne šeme, potpuno je opravdano koristiti *nizvodnu SL advektivnu šemu* sa dva nivoa, mada bi se u tom slučaju određivali položaji dolaznih tačaka. Uopšteno govoreći veza između položaja odlaznih i dolaznih tačaka se može predstaviti jednačinom:

$$\mathbf{r}^{(n+1)} = \mathbf{r}^{(n)} + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) dt \quad (12)$$

Rečeno je da za slučaj implementacije uzvodne SL advektivne šeme nepoznat je vektor položaja odlazne tačke $\mathbf{r}^{(n)}$, a on se traži pomoću modifikovanog izraza (12). Glavni problem u ovom slučaju predstavlja rešavanje integrala, a po pravilu integral se aproksimira na sledeći način:

$$\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) dt = \bar{\mathbf{v}}\Delta t \quad (13)$$

gde je sa $\bar{\mathbf{v}}$ označena srednja brzina delića duž njegove trajektorije. Postoji veliki broj predloženih rešenja za ovaj problem imajući u vidu zahtev za efikasnošću i tačnošću primenjenog postupka. Bez sumnje, najjednostavniji je Ojlerov algoritam prema kojem se polazni položaj delića određuje pomoću izraza:

$$\mathbf{r}^{(n)} = \mathbf{r}^{(n+1)} - \mathbf{v}^{(n)}\mathbf{r}^{(n+1)} \quad (14)$$

gde se umesto osrednjene brzine $\bar{\mathbf{v}}$ duž trajektorije delića koristi brzina u odlaznoj tački sa vremenskog nivoa n. Bez obzira na jednostavnost ovog postupka, javlja se problem što ovaj algoritam ima prvi red tačnosti u vremenu a samim time je i greška odsecanja prilikom njegove primene velika. Iz tog razloga se ovo rešenje ne koristi samo za sebe, već u kombinaciji sa

nekom šemom većeg reda tačnosti. Najčešće se koristi polu-implicitni metod srednje tačke za određivanje trajektorije delića gde se položaj odlazne tačke izračunava pomoću izraza:

$$\mathbf{r}^{(n)} = \mathbf{r}^{(n+1)} - \mathbf{v}^{(n+\frac{1}{2})} \left(\frac{\mathbf{r}^{(n+1)} + \mathbf{r}^{(n)}}{2} \right) \quad (15)$$

Položaj odlazne tačke u prvoj iteraciji se određuje korišćenjem Ojlerovog algoritma, izraz (14), a brzina $\mathbf{v}^{(n+\frac{1}{2})}$ predstavlja vremenski ekstrapolisano brzinu na vremenski nivo $(n + \frac{1}{2})$, pomoću sledećeg izraza [1]:

$$\mathbf{v}^{(n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}(3\mathbf{v}^{(n)} - \mathbf{v}^{(n-1)}) \quad (16)$$

1.3.2 Trajektorije na površini sfere

Do sada je prikazana implementacija SL advektivne šeme na problemu ravne geometrije. Međutim, problemi koji se rešavaju u ravnoj geometriji ne nalaze veliku primenu u globalnim modelima u meteorologiji. Iz tog razloga se sve šeme, koje će se implementirati u globalne modele, nakon uspešnog testiranja u ravnoj geometriji moraju prilagoditi sfernoj geometriji. Prirodan izbor koordinatnog sistema za opis sferne geometrije je sferni koordinatni sistem. Međutim, pored toga što ovaj koordinatni sistem uspešno opisuje probleme u sfernoj geometriji, on nosi sa sobom i neke nepoželjne elemente kao što je konvergencija meridijana na većim geografskim širinama. U ovom delu rada opisan je postupak računanja trajektorije delića vazduha za slučaj sferne geometrije, i način na koji se može izbeći problem singulariteta u polovima.

Računanje trajektorije na površini sfere, prilikom implementacije uzvodne SL advektivne šeme sa dva nivoa, predstavlja postupak računanja koordinata *odlazne tačke* geografske dužine i širine $(\lambda^{(n)}, \theta^{(n)})$ u vremenskom trenutku (n) . *Dolazne tačke* tada grade pravilnu mrežu tačaka na sferi, u vremenskom trenutku $(n+1)$, čije su koordinate unapred poznate, $(\lambda^{(n+1)}, \theta^{(n+1)})$. Pomoću izraza (17), koji se poziva na relacije *velikog kruga na sferi*, i (18) uspešno su

računate trajektorije na površini sfere (pogledati dodatak **A**).

$$\theta^{(n)} = -\arcsin\left(\cos(b)\sin\left(\frac{d}{R}\right)\cos\theta^{(n+1)} + \sin\theta^{(n+1)}\cos\left(\frac{d}{R}\right)\right) \quad (17)$$

$$\lambda^{(n)} = \lambda^{(n+1)} - \arccos\left(\frac{\cos\left(\frac{d}{R}\right) - \sin\theta^{(n+1)}\sin\theta^{(n)}}{\cos\theta^{(n+1)}\cos\theta^{(n)}}\right) \quad (18)$$

U izrazima (17) i (18) figurišu sledeće veličine: d - put koji delić pređe u jednom vremenskom koraku, tj. rastojanje između odlazne tačke i dolazne tačke, računa se pomoću izraza (19). Jasno je da put koji delić pređe zavisi od intenziteta polja vetra jer vetar nosi delić sa jednog mesta na drugo, u predstavlja brzinu vetra u zonalnom pravcu dok v predstavlja brzinu vetra u meridijalnom pravcu, i dužine vremenskog koraka. b - predstavlja ugao između pravca kretanja delića na sferi i pravca Severa, a računa se pomoću izraza (20), dok R - predstavlja vrednost radiusa sfere. Jednačina (20) ima singularitet i kada je $v = 0$ to znači da vrednost b u tom slučaju može biti samo $b = 0$ ili $b = \pi$, tj. delić se kreće u pravcu Severa¹.

$$d = \sqrt{u^2 + v^2} \Delta t \quad (19)$$

$$b = \arctan\left(\frac{u}{v}\right) \quad (20)$$

Za računanje trajektorije korišćen je iterativni metod koji kombinuje izraze (17), (18), (19) i (20). U prvoj iteraciji, izrazi (19) i (20) sa računaju sa vrednosti intenziteta polja vetra u dolaznoj tački ($u^{(n+1)}$, $v^{(n+1)}$), a potom se dobijeni rezultati zajedno sa koordinatama dolazne tačke, $\theta^{(n+1)}$, uvrste u izraz (17). Ovaj rezultat predstavlja koordinate odlazne geografske širine $\theta^{(n)}$ i koristi se u izrazu (18) da bi se izračunala geografska širina odlazne tačke, $\lambda^{(n)}$. Koordinate ($\lambda^{(n)}$, $\theta^{(n)}$) predstavljaju *rešenje prve iteracije*, jer je za računanje ovih koordinata korišćena vrednost polja vetra u dolaznoj tački, a ne u odlaznoj kao što bi bilo pravilnije. Potom je pomoću nekog interpolacionog metoda (pogledati poglavlje 1.4) određeno polja vetra u koordinatama

¹U programiranju, konkretno u programskom jeziku Fortran, postoji funkcija atan2 koja je prilagođena ovakvoj problematici. U izrazu (20) funkcija atan se zameni funkcijom atan2.

koje su rezultat prve iteracije a opisani postupak traženja koordinata odlazne tačke je ponovljen sa novim vrednostima polja vetra. Ovakav postupak se ponavlja sve dok razlika između rezultata koordinata odlazne tačke (m)-te i (m-1) iteracije ne bude manja od neke unapred određene vrednosti.

Uočimo da izraz (18) ima singularitet za $\theta^{(n)} = \pm\pi/2$ i $\theta^{(n+1)} = \pm\pi/2$. To znači da se prethodno opisana procedura ne može koristiti u oblasti polova. Međutim, problem singulariteta je rešen uvođenjem *rotacije koordinata*. Ako posmatramo dolaznu tačku sa koordinatama $(\lambda^{(n+1)}, \theta^{(n+1)})$ koja se nalazi u blizini pola, jasno je da ova tačka ima problem singulariteta. Ako bi se koordinatni sistem zarotirao za $-\lambda^{(n+1)}$ ugao po geografskoj dužini a potom još za $-\theta^{(n+1)}$ ugao po geografskoj širini, tada bi se posmatrana tačka dovela u *virtualnu dolaznu tačku* sa koordinatama $(\lambda_0^{(n+1)} = 0, \theta_0^{(n+1)} = 0)$. Za opisanu rotaciju koordinata koristi se matrica rotacije $\mathbf{A}(\lambda^{(n+1)}, \theta^{(n+1)})$ koja kao argument koristi koordinate dolazne tačke $(\lambda^{(n+1)}, \theta^{(n+1)})$ kako bi dolaznu tačku prevela u virtualnu dolaznu tačku sa koordinatama $(0, 0)$.

$$\mathbf{A}(\lambda^{(n+1)}, \theta^{(n+1)}) = \begin{pmatrix} \cos \lambda^{(n+1)} \cos \theta^{(n+1)} & -\sin \lambda^{(n+1)} & \cos \lambda^{(n+1)} \sin \theta^{(n+1)} \\ \sin \lambda^{(n+1)} \cos \theta^{(n+1)} & \cos \lambda^{(n+1)} & \sin \lambda^{(n+1)} \sin \theta^{(n+1)} \\ -\sin \theta^{(n+1)} & 0 & \cos \theta^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

Potom se ponovo započinje iterativna procedura računanja trajektorije kako bi se dobila *virtualna odlazna tačka* $(\lambda_\star^{(n+1)}, \theta_\star^{(n+1)})$. U ovom slučaju korišćeni izrazi (17) i (18) se mogu uprostiti do oblika prikazanih izrazima (21) i (22) jer su poznate vrednosti za $\cos \theta_0^{(n+1)} = 1$ i $\sin \theta_0^{(n+1)} = 0$. Na ovaj način se pravi ušteda u računskom vremenu.

$$\theta_\star^{(n)} = -\arcsin \left(\cos(b) \sin \left(\frac{d}{R} \right) \right) \quad (21)$$

$$\lambda_\star^{(n)} = -\arccos \left(\frac{\cos \left(\frac{d}{R} \right)}{\cos \theta_\star^{(n)}} \right) \quad (22)$$

Međutim u izrazu (22) se ponovo javlja singularitet, ali za razliku od prošlog puta ovde je singularitet samo za vrednost $\theta_\star^{(n)} = \pm\pi/2$. Kako bi se izbegao singularitet mora se uzeti u obzir ograničenje za dužinu vremenskog

koraka, Δt . Ograničenje $\Delta t \neq \frac{\pi R}{2\sqrt{u^2+v^2}}$ predstavlja zabranu da u jednom vremenom koraku delić pređe $\pi R/2$ rastojanja na sferi. Međutim ovakvo ograničenje je uvek ispunjeno, obzirom da je $\Delta t \ll \frac{\pi R}{2\sqrt{u^2+v^2}}$, što znači da je na ovaj način rešen problem singulariteta. Kada se izračunaju vrednosti za virtualnu odlaznu tačku $(\lambda_\star^{(n)}, \theta_\star^{(n)})$, ove koordinate se rotiraju nazad u prvobitan položaj pomoću iste matrice rotacije sa jednom bitnom razlikom a to je da se ovaj put koordinate rotiraju u pozitivnom smeru, kako bi se dobile koordinate prave odlazne tačke $(\lambda^{(n)}, \theta^{(n)})$.

1.4 Interpolacija

Interpolacija je matematički postupak traženja vrednost nepoznate funkcije u tačkama koje se nalaze između tačaka sa prethodno poznatim vrednostima funkcije, tj. na osnovu poznatih podataka traži se funkcija koja predstavlja dobru aproksimaciju za vrednosti funkcije u tačkama sa nepoznatom vrednošću. Zbog jednostavnosti polinomske funkcije, pojam interpolacija se najčešće odnosi na interpolaciju realne funkcije algebarskim polinomom n -tog reda, a oblik ovog interpolacionog polinoma je $P_N(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N$. Pošto se odlazne tačke u uzvodnoj SL šemi sa dva nivoa, gotovo uvek, nalaze van pravilno raspoređenih tačaka mreže i samim tim je potrebno odrediti vrednost polja u odlaznoj tački. U ovom delu teksta biće opisane neke od korišćenih interpolacionih metoda pri izradi ovog master rada.

1.4.1 Lagranžev interpolacioni polinom

Ukoliko analitički izraz neke funkcije nije poznat, već su poznate samo vrednosti iste funkcije u diskretnim tačkama, tada se postavlja pitanje kako dobiti vrednosti funkcije, i za one vrednosti argumenta, koje su nepoznate. Da bi se odredila vrednost funkcije f_i koja je poznata samo u diskretnim tačkama $(x_i, y_i, \text{ gde } \forall i \in \mathbb{N})$ traži se neka funkcija $g(x)$ koja je jednostavna za izračunavanje a čija je vrednost u tački $x = x_i$ ista kao vrednost funkcije f_i , odnosno $g(x = x_i) = f_i$. Tačke (x_i, f_i) se nazivaju *čvorovi interpolacije*. Kada se funkcija $g(x)$ traži u obliku polinoma, interpolacija se naziva *poli-*

nomna interpolacija a za ovakvu interpolaciju se najčešće koristi *Lagranžev interpolacioni polinom*. Lagranžev interpolacioni polinom, $P_N(x)$, se formira za proizvoljan raspored čvorova interpolacije, kao što ćemo videti. Neka su tačke x_i , gde je $\forall i \in \mathbb{N}$, i neka su f_i vrednosti funkcije $f(x)$ u tim tačkama, tada se Lagranžev interpolacioni polinom N -tog reda može napisati u obliku:

$$\begin{aligned}
 P_N(x) &= \sum_{i=1}^N \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) f_i \\
 &= \sum_{i=1}^N L_i(x) f_i
 \end{aligned} \tag{23}$$

L_i predstavlja *Lagranževe koeficijente*, a njihov analitički oblik se može videti u izrazu (23). Konkretno L_i predstavlja težinske vrednosti za interpolaciju, jer se sa njima određuje koliki je doprinos vrednosti f_i za mesto gde se vrši interpolacija, x . Neki od češće korišćenih interpolacionih polinoma su:

- $N=2$ - linearna interpolacija (dve tačke),
- $N=3$ - kvadratna interpolacija (tri tačke),
- $N=4$ - kubna interpolacija (četiri tačke).

N predstavlja broj najbližih okolnih tačaka koje se koriste za interpolaciju.

Linearna interpolacija:

Za slučaj kada je $N = 2$, koriste se dve susedne tačke za interpolaciju za traženi argument x . Prema izrazu (23), Lagranžev interpolacioni polinom ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= L_1(x) f_1 + L_2(x) f_2 \\
 &= \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f_2
 \end{aligned} \tag{24}$$

Pri implementaciji ove interpolacione metode na konkretan problem potrebno je napraviti prethodno za traženje susednih tačaka, (x_1, f_1) i (x_2, f_2) , za vrednost argumenta x . Ova interpolacija je računski najisplativija, jer nije

potrebno mnogo računa da bi se izvela, međutim ima velike nedostatke kao što ćemo videti u poglavlju 2.

Kubna interpolacija:

Kada je $N = 4$, tada se za interpolaciju za traženi argument x koriste 4 susedne tačke. Lagranžev interpolacioni polinom će u tom slučaju imati sledeći oblik:

$$P_4(x) = L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 + L_3(x)f_3 + L_4(x)f_4$$

gde Lagranževi koeficijenti imaju formu:

$$L_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \cdot \frac{x - x_4}{x_1 - x_4}$$

$$L_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \cdot \frac{x - x_4}{x_2 - x_4}$$

$$L_3(x) = \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \cdot \frac{x - x_4}{x_3 - x_4}$$

$$L_4(x) = \frac{x - x_1}{x_4 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_4 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_4 - x_3}$$

Uočimo da pri implementiranju kubne interpolacije je potrebno izvesti više računa da bi se dobio rezultat. Samim tim ovakva interpolacija je nekoliko puta računski skuplja nego linearna interpolacija. Stvari se dodatno usložnjavaju ako se ne posmatra jedno-dimenzioni problem $f = f(x)$, već se posmatra dvodimenzioni problem kakav se sreće pri interpolaciji polja neke veličine $f = f(x, y)$. Tada se umesto linearne interpolacije koristi *bilinearna interpolacija*, a umesto kubne interpolacije koristi *bikubna interpolacija*. Za ovakve interpolacije potrebno je N^2 susednih tačaka da bi se interpolisala vrednost polja na nekom mestu, jer se interpolacija vrši u dve dimenzije.

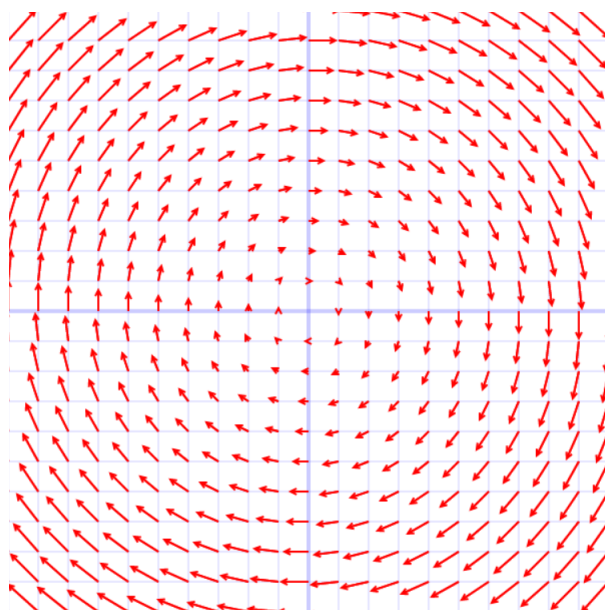
2 Numerički testovi

U ovom poglavlju ćemo prikazati rezultate numeričkih šema koji su prethodno opisane u poglavlju 1.3. Prikazani testovi su standardni testovi koji se vrše prilikom ocene advektivnih šema, kao i originalno dizajnirani testovi na taj način da opisuju situacije u kojima se lako može proveriti dobijeni rezultat. Neke prednosti testiranih advektivnih šema će biti istaknute uz diskusiju rezultata.

2.1 Numerički testovi u ravni

Prvi test se odnosi na analiziranje pasivne advekcije u ravni kada je polje vetra stacionarno, polje vetra se ne menja u vremenu. Oblast modela površine 50×50 km izdeljena (51×51 tačka u mreži) tako da koraci u prostoru za oba pravca budu jednaki, $\Delta x = \Delta y$, i iznose 1 km. Polje vetra je definisano kao stacionarno, rotorno polje ($\nabla \times \mathbf{V} \neq 0$; $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$), a oblik polja vetra odgovara izrazu $\mathbf{V}(n_i - 26, n_j - 26) = n_j \Delta y \hat{\mathbf{i}} - n_i \Delta x \hat{\mathbf{j}}$, gde $n_i, n_j \in [1, 51]$ i na taj način odabirom vrednosti (n_i, n_j) definiše se tačka mreže. Na Slici 3 je prikazan odgovarajući oblik polja vetra koji je korišćen u ovom testu, a vidi se da ovako definisano polje vetra ima konstantnu ugaonu brzinu, oko centra oblasti, u svim tačkama. Dužina vremenskog koraka, Δt , iznosi 900 s, a maksimalna vrednosti intenziteta vetra je u najudaljenijim tačkama od centralne tačke (26,26) i iznosi 1 m/s. Ovakav izbor parametara sigurno obezbeđuje uslov da ne dolazi do presecanja računatih trajektorija, samim tim što je polje vetra nije divergentno, i nestabilnosti u SL modelu. Kurantov broj, C , za date vrednosti brzine, vremenskog i prostornog koraka iznosi oko 0.9.

U ovom testu definisano je početno polje temperature koje je prikazano na Slici 4, a zatim je modelovana advekcija datog polja temeprature u polju vetra \mathbf{V} nad posmatranim domenom. Upravo opisan test je *test rotacije usečenog cilindra*. Vremenska integracija modela je višena dok se ne izvrši jedna puna rotacija. Rezultati numeričke integracije su prikazani na Slici 5. Može se primetiti da je izgled polja temperature koji se nalazi u središtu domena dobro očuvan. Isti test je ponovo sproveden sa bitnom razlikom da je korišćena bilinearna interpolacija, umesto bikubne interpolacije. Period



Slika 3: Oblik polja vetra koji advektira fluid u ravni. Ilustrativno, slika prikazuje oblast 21×21 tačka, dok u modelu ima 51×51 .

pune rotacije se poklapa sa periodom pune rotacije u prethodnom slučaju, jer razlika u interpolaciji ne utiče na intenzitet vetra u velikoj meri, obzirom da je polje vetra stacionarno. Međutim rezultati drugog testa, prikazani na Slici 6, ukazuju na značajno odstupanje polja temperature, nakon perioda pune rotacije, u odnosu na inicijalno polje temperature. Ovaj rezultat je značajno lošiji samim tim što je jasno da usled “čiste” advекcije ne bi smelo da dođe do ovakvog rezultata, kao što je opisano u uvodnom delu 1.1.2. Uočimo da rezultati ovih numeričkih simulacija imaju nedostatke, produkuju manja ili veća odstupanja od inicijalnog oblika polja temperature prikazanog na Slici 4. Test rotacije usečenog cilindra je praktičan obzirom da se može problem može rešiti korišćenjem egzaktnih izraza za trajektorije dolaznih delića. To znači da su trajektorije za dolazni delić računane pomoću izraza za trajektoriju tačke koja rotira, na ovaj način se dobilo “egzaktno” rešenje testa korišćenjem uzvodne SL advektivne šeme, a ovo rešenje se može uporediti sa rezultatima numeričkih modela. Rešenje egzaktno računatih trajektorija testa je prikazano na Slici 7.

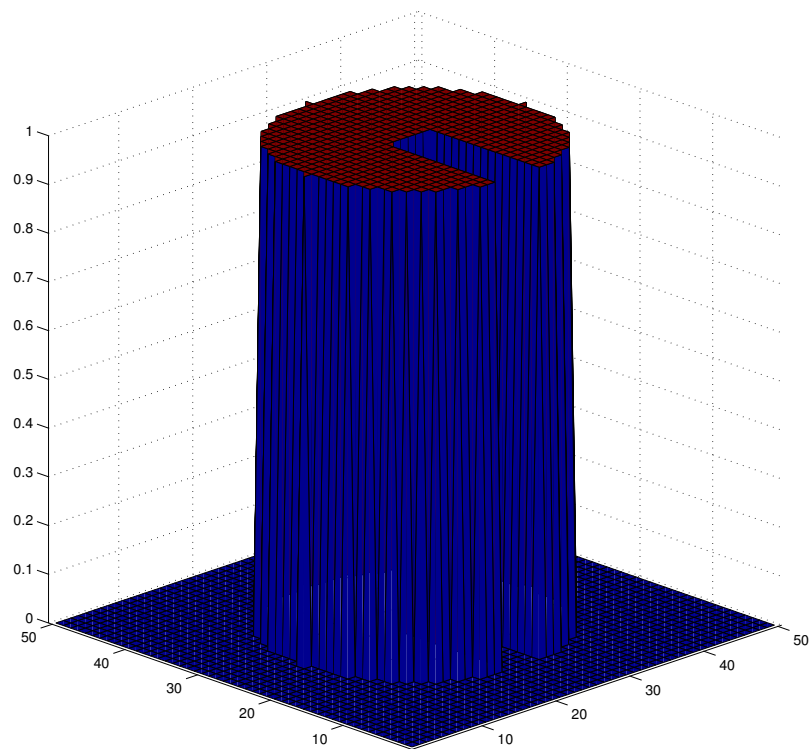
U ovom testu se uzvodna SL advektivna šema, u kombinaciji sa bikub-

nom interpolacijom, pokazala kao uspešan metod za modelovanje advekcije u ravni. Prikazani rezultati ukazuju na to da odabir interpolacione metode u modelu u velikoj meri utiče na konačan rezulta modela. Doduše kvalitet konačnog rezultata modela je uslovljen uvećanom potrošnjom računskim vremenom obzirom da je za bikvadratnu interpolaciju potrebno više računarskog vremena od bilinearne interpolacione metode. Ideja ovog pristupa je da se uzvodna SL advektivna šema primeni i na problem advekcije na sferi.

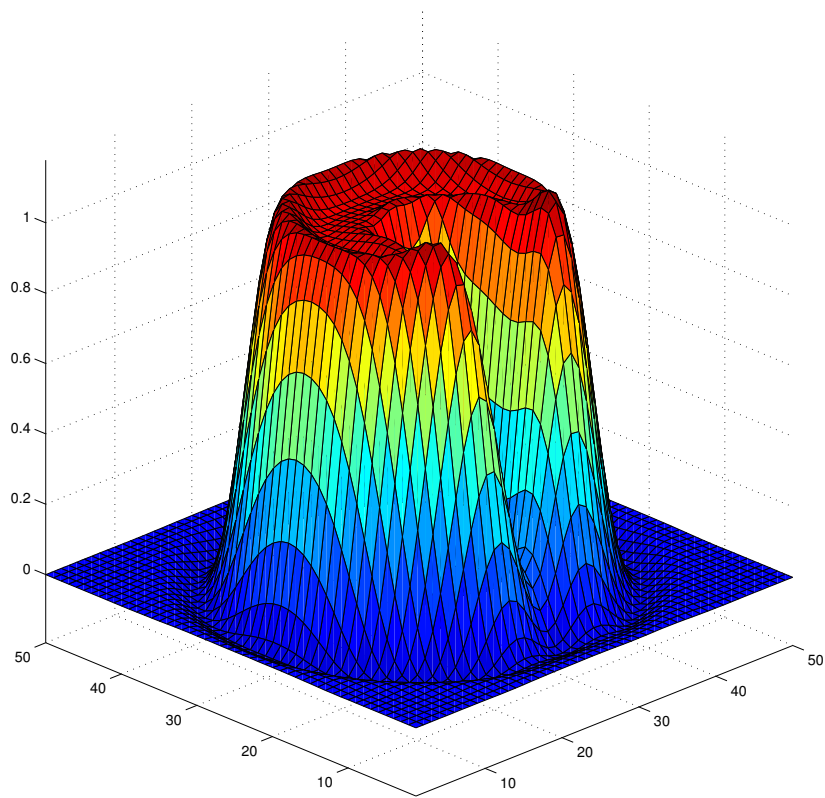
2.2 Numerički testovi na površini sfere

U poglavlju 2.1 je pokazano da se uzvodna SL advektivna šema može uspešno primeniti za modelovanje pasivne advekcije u ravni. Naredni test se odnosi na primenu iste advektivne šeme za modelovanje pasivne advekcije na sferi. Sferi poluprečnika $R = 6371$ km, što odgovara poluprečniku Zemlje, je pokrivena mrežom tačaka takvom da su prostorni koraci jednaki, $\Delta\lambda = \Delta\theta$, i iznose 1° . Usled konvergencije meridijana tačke se u zonalnom pravcu, na različitim geografskim širinama, nalaze na različitom rastojanju. Ovo rastojanje je najveće na ekvatoru $d_{\max} = \frac{2R\pi}{360}$, dok se ka polovima smanjuje. Na samim polovima ($\theta = \pi/2 = -\pi/2$), na istim koordinatama (x, y, z) se nalazi 361 tačka. Polje vetra \mathbf{V} je stacionarno, rotorno polje, koje ni u jednoj tački nema $\hat{\mathbf{e}}_y$ komponentu brzine vetra, tj. rotacija se vrši samo u x, z ravni, oko y -ose. Najintenzivniji vektor vetra se nalazi na nultom meridijanu i iznosi $|\mathbf{v}_0| = 20$ m/s, a na osnovu vrednosti $|\mathbf{v}_0|$ se potom konstruiše opisano polje vetra na sferi (pogledati dodatak **B**). Dužina vremenskog koraka, Δt , iznosi 3600 s. Ovakvim izborom parametara za vremenski korak, prostorni korak i polje brzine vetra na ekvatoru Kurantov broj iznosi oko 0.65 dok se na višim geografskim širinama vrednost Kurantovog broja povećava.

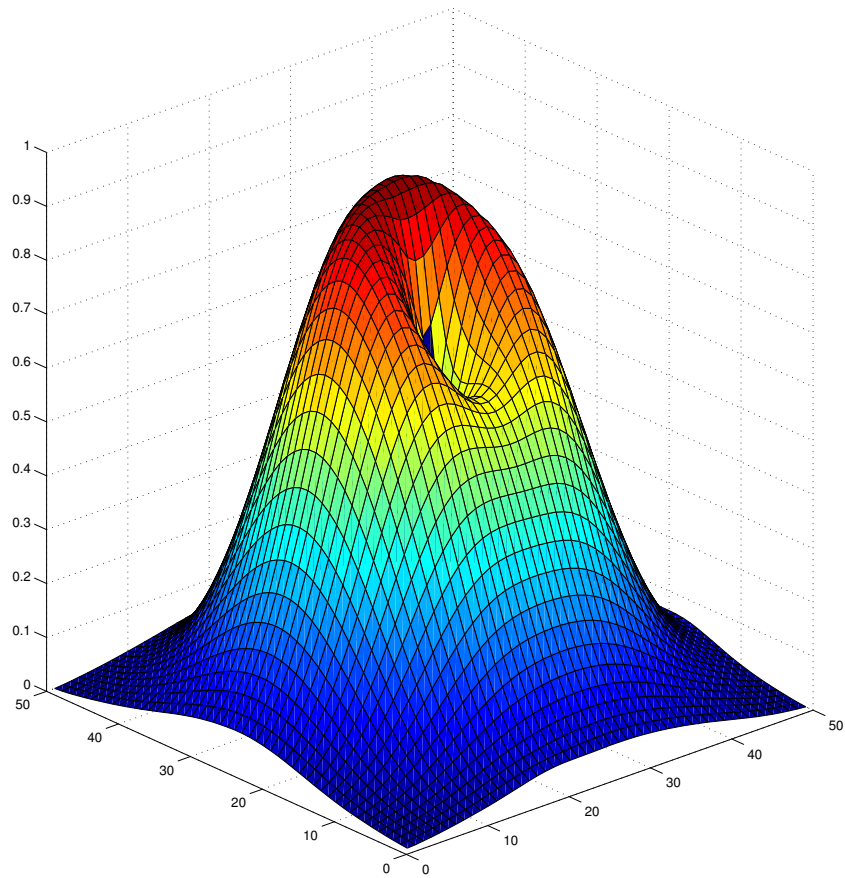
Inicijalno polje temperature u testu je definisano u obliku prikazanom na Slici 8. Uočimo da je polje temperature definisano tako da linearno raste od 0°C do 10°C sa smanjenjem geografske širine između $10^\circ > \theta > 0^\circ$, a potom linearno opada za vrednosti geografske širine $0^\circ > \theta > -10^\circ$. Za sve tačke mreže koje se nalaze van geografske širine $10^\circ > \theta > -10^\circ$ vrednost polja temperature iznosi 0°C . Ovako definisano polje temperature ima oblik



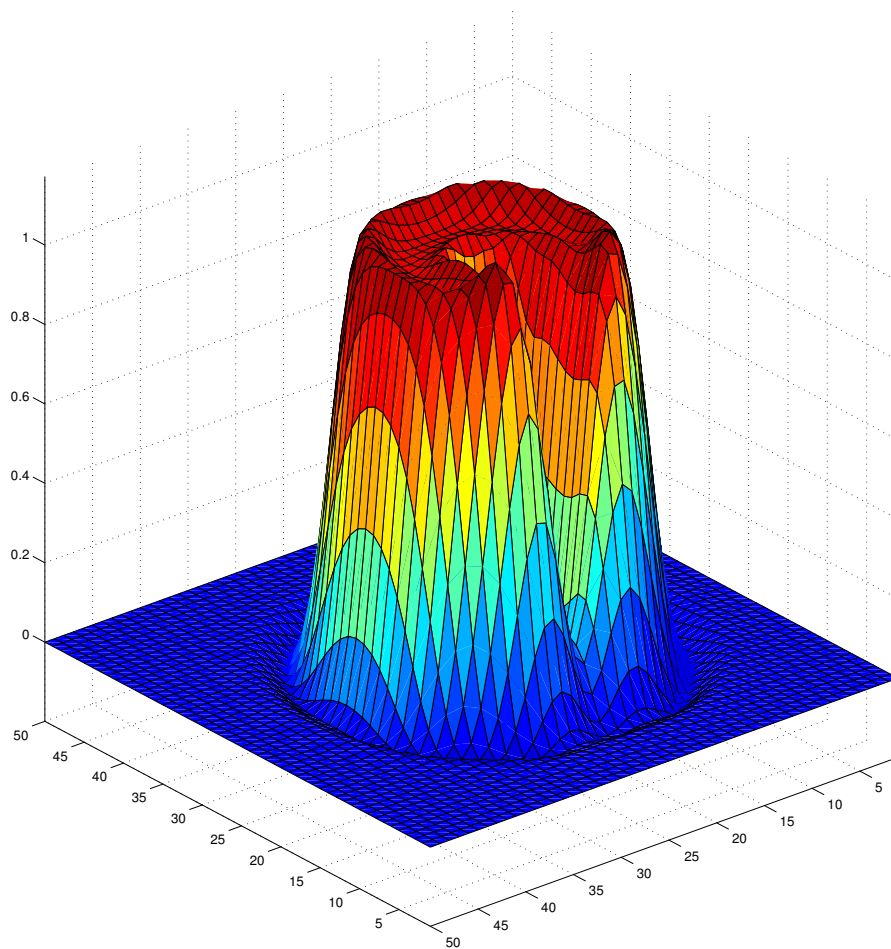
Slika 4: Inicijalna vrednost polja temperature u testu rotirajućeg cilindra ($n_t = 0$), vrednost polja temperature je svuda 0°C osim u okviru cilindra gde je vrednost 1°C .



Slika 5: Gornja slika predstavlja rezultate uzvodne SL advektivne šeme nakon perioda pune rotacije ($n_t=262$) pri korišćenju bikubne interpolacije u svakom vremenskom koraku za određivanje polja vetra i polja temperature.



Slika 6: Gornja slika predstavlja rezultate uzvodne SL advektivne šeme nakon perioda pune rotacije ($n_t=262$) pri korišćenju bilinearne interpolacije u svakom vremenskom koraku za određivanje polja vetra i polja temperature.



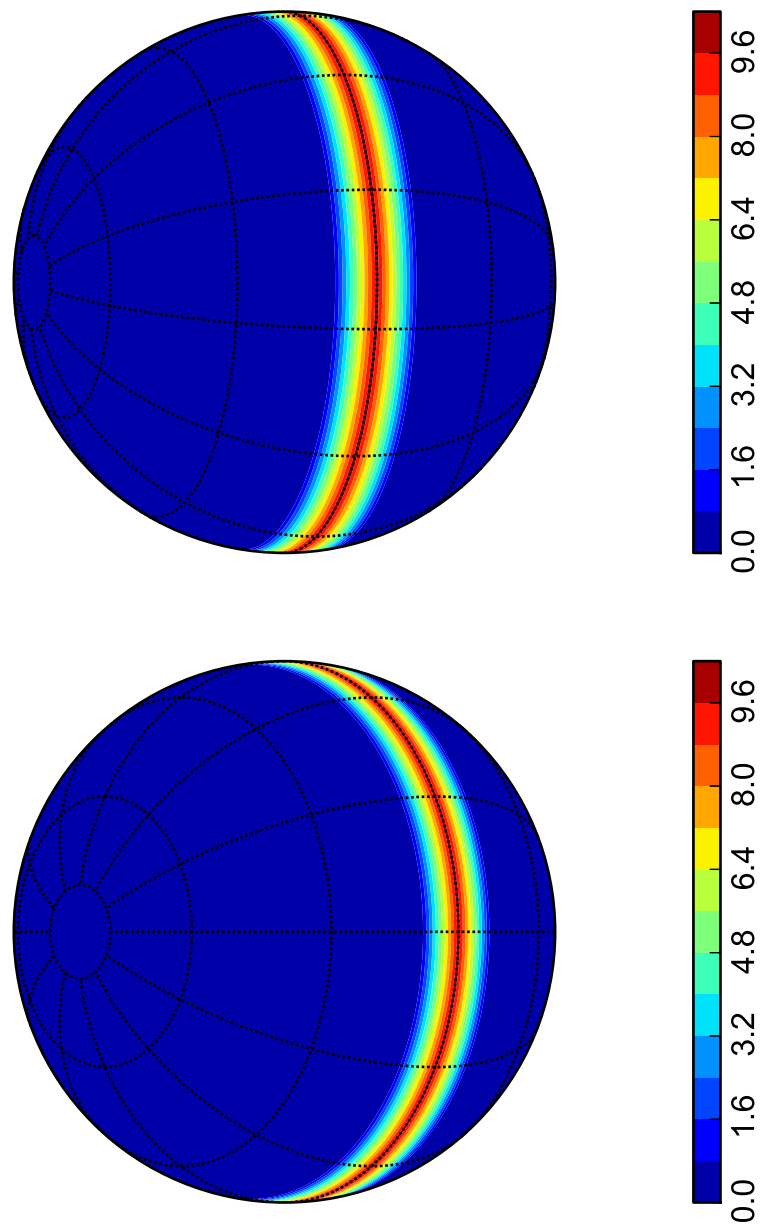
Slika 7: Rezultati uzvodne SL advektivne šeme za test rotirajućeg cilindra. Trajektorije su računane pomoću egzaktnih izraza za rotaciju cilindra, a korišćena je bikubna interpolaciona metoda.

prstena lociranog na ekvatoru, a prethodno opisana linearna promena temperature unutar oblasti ekvatora obezbeđuje smanjenje vrednosti gradijenta temperature u pravcu promene geografske širine, $\frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{e}_\theta$. Rotacija ovakvog polja temperature u prethodno opisanom polju vetra \mathbf{V} bi trebala dovesti do advekcije koja održava oblik polja temperature na sferi, prstena, očuvan i u toj formi ga advektira preko polova.

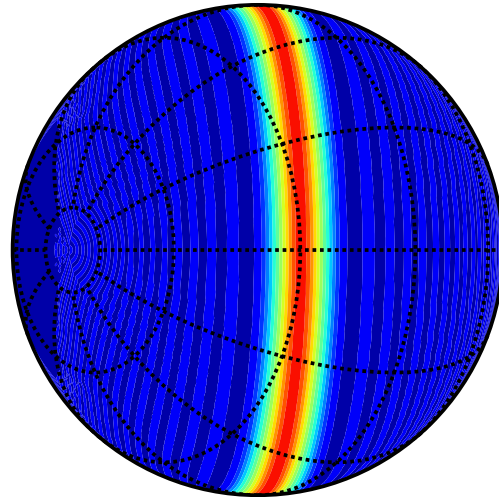
Rezultati predstavljeni na Slici 9 i 10 su rezultat numeričke integracije prethodno opisanog testa pomoću uzvodne SL advektivne šeme u kombinaciji sa bikubnom interpolacionom metodom. Numerička integracija je vršena za, $n_t = 138$, vremenskih koraka, što odgovara periodu potrebnom da se polje temperature rotira za ugao $\pi/2$, odnosno da “prsten” advektira sa ekvatora do pola. Ovaj rezultat se slaže sa teorijski očekivanom vrednoću koja predviđa da je za ovu rotaciju potrebno 68.8 vremenskih koraka. Teorijska vrednost je izračunata na osnovu vremena koje je potrebno da tačka sa ekvatora pređe $\pi R/2$ puta na sferi brzinom $|\mathbf{v}_0|$. Prikazani su rezultati nakon 46, 92 i 138 vremenskih koraka, što odgovara rotaciji za $\pi/6$, $\pi/4$ i $\pi/2$ ugla respektivno, i može se uočiti da na rezultatima nema velikog rasipanja, već da se polje temperature očuvano advektira na sferi. Slika 9 je prikazana iz perspektive u kojoj je centrirana tačka ($\lambda = 0^\circ$, $\theta = 40^\circ$), i prikazuje deformaciju polja temperature pri advekciji preko nultog meridijana, meridijana sa najvećom vrednosti brzine vetra, dok Slika 10 prikazuje deformaciju polja temperature iz perspektive gde je centrirana tačka ($\lambda = 70^\circ$, $\theta = 20^\circ$) i na istoj se mogu videti rezultati uzvodne SL advektivne šeme u tačkama koje miruju, ($\lambda = 90^\circ$, $\theta = 0^\circ$), i oko kojih se polje temperature rotira. Na Slikama 11 i 12 su na isti način prikazani rezultati uzvodne SL advektivne šeme sa primenjenom bilinearnom interpolacijom. Uočimo rasipanje polja temperature unutar prstena. Već posle $n_t = 46$ vremenog koraka vrednost polja temperature značajno odstupa od inicijalnog polja temperature. Na Slici 12 se jansno vidi proširenje prstena koje je prouzrokovano bilinearnom interpolacijom.

Ovim testom je pokazano da predloženi pristup računanja trajektorija na sferi daje dobre rezultate koji se slažu sa analitički izračunatim pređenim putem. Važno je uočiti da je usled rotacije koordinatnog sistema, opisane u poglavlju 1.3.2, rešen problem singulariteta i time je računanje advekcije na

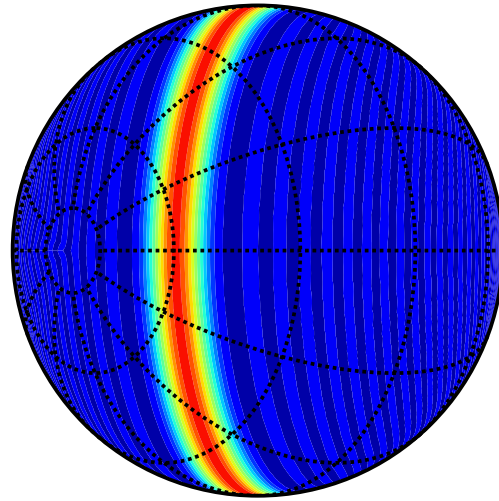
domenu cele sfere omogućeno. Međutim, kao što je i očekivano, rezultati numeričke integracije uzvodne SL advektivne šeme u kombinaciji sa bikubnom interpolacionom metodom daju značajno bolje rezultate nego što je u slučaju kombinacije sa bilinearnom interpolacijom, ali po cenu povećane potrošnje računskog vremena.



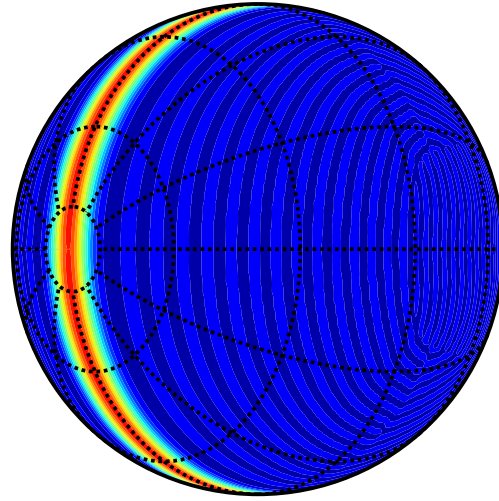
Slika 8: Inicijalno polje temperature ima oblik prstena koji se nalazi na ekvatoru, vrednost polja van oblasti ekvatora je 0°C . Perspektiva leve slike: ($\lambda = 0^{\circ}, \theta = 40^{\circ}$), perspektiva desne slike: ($\lambda = 70^{\circ}, \theta = 20^{\circ}$).



$n_t = 46$

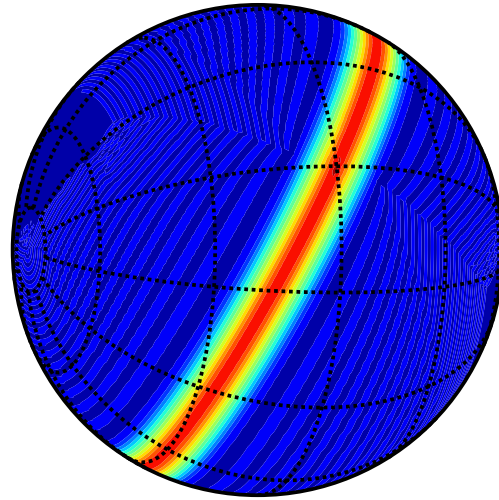


$n_t = 92$

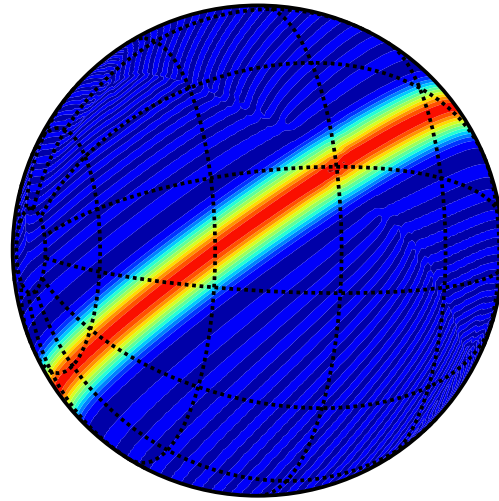


$n_t = 138$

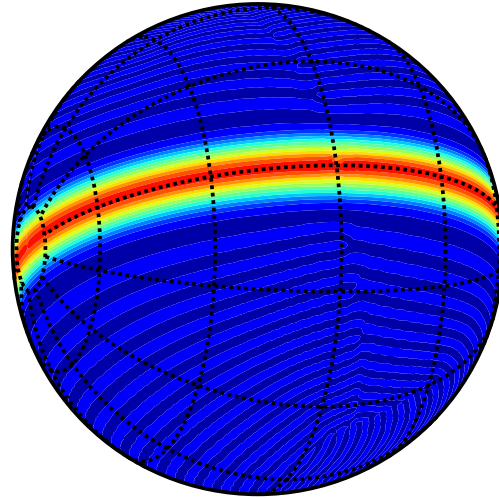
Slika 9: Rezultati uzvodne SL advektivne šeme na sferi pri korišćenju bikubne interpolacije za tri različita vremenska trenutka (n_t) iz perspektive ($\lambda = 0^\circ, \theta = 40^\circ$).



$n_t = 46$

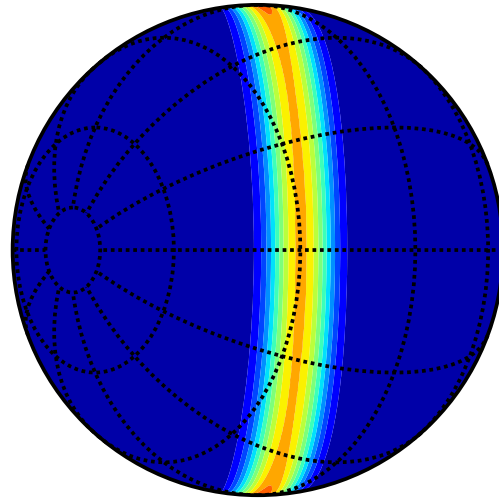


$n_t = 92$

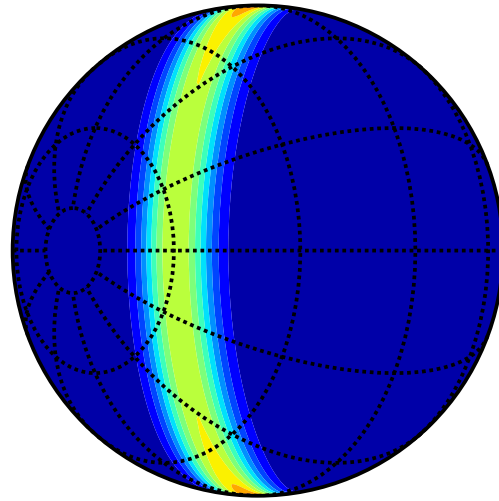


$n_t = 138$

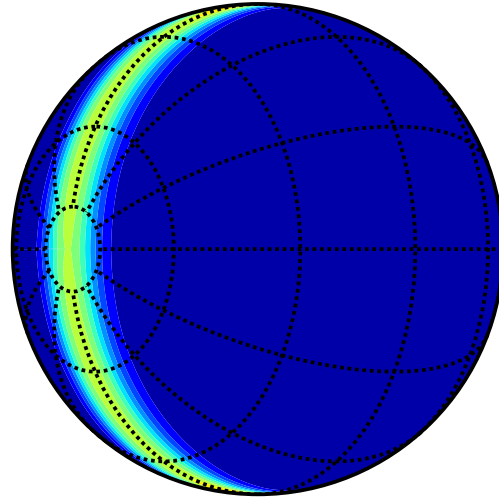
Slika 10: Rezultati uzvodne SL advektivne šeme na sferi pri korišćenju bikubne interpolacije za tri različita vremenska trenutka (n_t) iz perspektive ($\lambda = 70^\circ, \theta = 20^\circ$).



$n_t = 46$

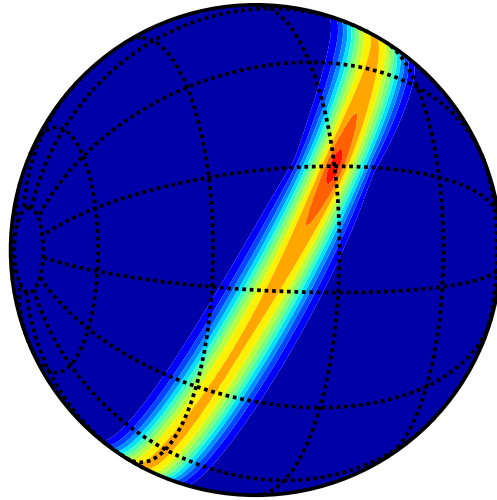


$n_t = 92$

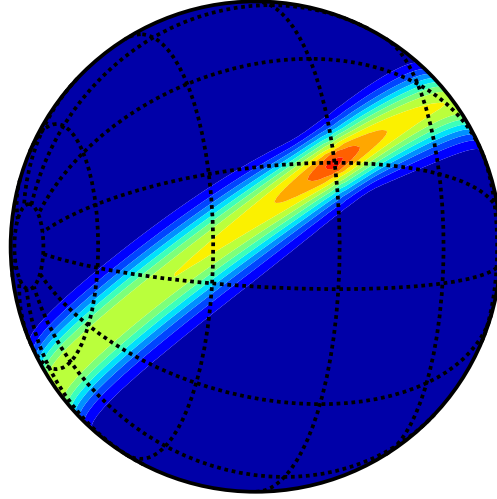


$n_t = 138$

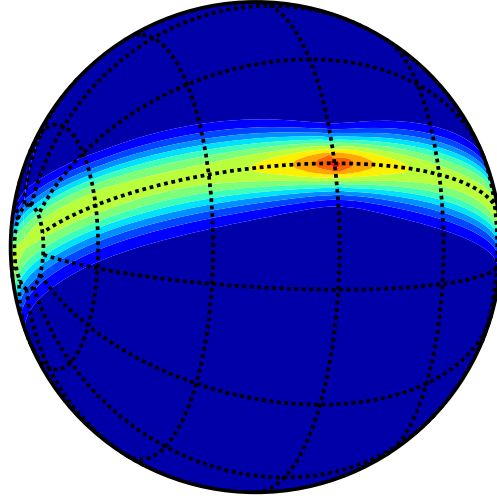
Slika 11: Rezultati uzvodne SL advektivne šeme na sferi pri korišćenju bilinearne interpolacije za tri različita vremenska trenutka (n_t) iz perspektive ($\lambda = 0^\circ, \theta = 40^\circ$).



$n_t = 48$



$n_t = 92$



$n_t = 138$

Slika 12: Rezultati uzvodne SL advektivne šeme na sferi pri korišćenju bilinearne interpolacije za tri različita vremenska trenutka (n_t) iz perspektive ($\lambda = 70^\circ, \theta = 20^\circ$).

3 Zaključak

Dobro je poznata činjenica da se teorijski tretman dinamike fluida može obaviti upotrebom dva različita pristupa. To su Ojlerov i Lagranžev pristup. Oba pristupa imaju svoje pozitivne i negativne osobine. Međutim, u ovom radu smo se bavili pristupom koji je kombinacija dva prethodno pomenuta, semi-Lagranževim pristupom.

Numerički test koji je obavljen u ravni potvrdio je da se pomoću ovog pristupa uzvodne SL advektivne šeme može modelovati proces advekcije. U slučaju kombinovanja uzvodne SL advektivne šeme sa bilinearnom interpolacijom dobijeni rezultat je značajno lošiji jer je činjenica da je došlo do pojave disperzije nakon jedne pune rotacije.

U drugom testu uzvodna SL advektivna šema je prilagođena tako da trajektorije delića budu računane na površini sfere. U ovu svrhu je korištena sferna geometrija u kombinaciji sa rotacijom koordinata. Do sada, ovakav pristup rešavanja nismo našli u literaturi, a predložena metoda računanja trajektorije se pokazala kao uspešna i ono što predstavlja jedan od glavnih problema u računanju trajektorije na površini sfere, problem singulariteta, je na ovaj način jednostavno rešen. Drugi numerički test je tako osmišljen da bi se mogao uporediti sa vrednostima već poznate, i proverene, uzvodne SL advektivne šeme u ravni. Rezultati drugog numeričkog testa, advekcije prstena na površini sfere, su identični kao rezultati prvog testa. Kao i to da kombinovanje uzvodne SL advektivne šeme sa bikubnom interpolacijom daje značajno bolje rezultate od kombinovanja sa bilinearnom interpolacijom, što je konzistentno sa rezultatima testa usečenog cilindra.

Pošto smo videli da se ovaj pristup računanja trajektorija pokazao kao uspešan, interesantno je razmišljati o primeni ovog metoda u svrhe računanja trajektorija delića u potpuno Lagranževom pristupu na površini sfere. Ovaj pristup do sada nije zaživeo ali kao što je pokazano u radu [2], u ovome se može sagledati pravac našeg budućeg istraživanja.

Literatura

- [1] J. Coté A. Staniforth. *Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models-a review*. 1991.
- [2] I. Arsenić. *Primena potpuno Lagranževskog pristupa za numeričko modelovanje procesa advekcije u atmosferi*. 2011.
- [3] R Bullock. *Great circle distances and bearings between two locations*. 2007.
- [4] H. Lewy Courant R., K. Friedrichs. *Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik*. 1928.
- [5] G. Hakim J. Holton. *Dynamic meteorology*. 2013.
- [6] A. Staniforth J. Pudykiewicz, R. Benoit. *Preliminary results from a partial LRTAP model based on an existing meteorological forecast model*. 1985.
- [7] A. Staniforth Temperton. *An efficient two-time-level semi-Lagrangian semi-implicit integration scheme*. 1987.
- [8] P. Welander. *Studies on the general development of motion in a two dimensional, ideal fluid*. 1955.

Dodatak

A Jednačine za trajektorije na sferi

Pojam *velikog kruga* se najčešće sreće u navigaciji jer se, kao što ćemo videti, pomoću njega rešavaju brojni problemi iz ove oblasti. Veliki kurg je po definiciji presek sfere i ravni takav da kružnica koja se javlja kao linija preseka ima isti radius kao što je radius sfere. To znači da za svake dve tačke sa koordinatama (λ_1, θ_1) i (λ_2, θ_2) na sferi postoji samo jedan veliki krug koji ih spaja. Kretanjem od *haversine formule*² prikazane izrazom (A1), gde Ω predstavlja ugao koji odgovara luku između dve tačke koje se nalaze na velikom krugu [3], može se dokazati ekvivalentnost sa izrazom (A2).

$$\text{haversine} \left(\frac{\Omega}{2} \right) = \text{haversine}(\theta_1 - \theta_2) + \text{haversine}(\lambda_1 - \lambda_2) \cos \theta_1 \cos \theta_1 \quad (\text{A1})$$

$$\cos \left(\frac{d}{R} \right) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad (\text{A2})$$

Jednačina za pravac, b , je prikazana u izrazu (A3) je standardna jednačina koja se koristi u navigaciji.

$$\cos b = - \frac{\sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \left(\frac{d}{R} \right)}{\sin \left(\frac{d}{R} \right) \cos \theta_1} \quad (\text{A3})$$

Izraz (A3) se može napisati u obliku izraza (A4), što odgovara izrazu (17).

$$\theta_2 = - \arcsin \left(\cos(b) \sin \left(\frac{d}{R} \right) \cos \theta_1 + \sin \theta_1 \cos \left(\frac{d}{R} \right) \right) \quad (\text{A4})$$

Na sličan način, ako bi se izraz (A2) napisao u obliku (A5), gde se eksplicitno raspisuje član λ_2 , dobije se jednačina koja po svojoj formi odgovara jednačini (18).

$$\lambda_2 = \lambda_1 - \arccos \left(\frac{\cos d - \sin \theta_1 \sin \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} \right) \quad (\text{A5})$$

²Haversin je trigonometrijska funkcija definisana kao: $\text{haversin} \theta = \frac{1 - \cos \theta}{2}$ što se uz malo matematike može pokazati da je $\text{haversin} \theta = \sin^2 \frac{\theta}{2}$.

B Definisiranje polja vetra na sferi

U testu za pasivnu advekciju na površini sfere korišćeno je, stacionarno, rotorno polje vetra $\mathbf{V}(\lambda, \theta)$. U ovom dodatku je objašnjeno na koji način postaviti analitički izraz za polje vetra ovog oblika. Prvo, razmotrimo neke osobine ovakvog polja vetra:

1. Vektor polja vetra se u svakoj tački na sferi nalazi u x, z ravni, tj. nema komponentu duž $\hat{\mathbf{e}}_y$ orta.
2. Intenzitet vektora polja vetra u svakoj tački je takav da strujanje na sferi ima konstantnu ugaonu brzinu oko y -ose, a to podrazumeva da tačka koja treba da pređe najduži put mora da se kreće najbrže.

Vektor polja vetra u tački (λ, θ) se može zapisati kao $\mathbf{v} = u \hat{\mathbf{e}}_\lambda + v \hat{\mathbf{e}}_\theta$, a *prva osobina polja vetra* diktira uslov:

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y = 0 \quad (\text{B1})$$

Ort $\hat{\mathbf{e}}_y$ se može zapisati pomoću ortova u sfernom koordinatnom sistemu, $\hat{\mathbf{e}}_y = (\hat{\mathbf{e}}_\lambda, \hat{\mathbf{e}}_\theta)$, u sledećem obliku $\hat{\mathbf{e}}_y = \cos(\lambda)\hat{\mathbf{e}}_\lambda - \cos\theta \sin(\lambda)\hat{\mathbf{e}}_\theta$. Kada se analitički oblik za \mathbf{v} i $\hat{\mathbf{e}}_y$ zamene u izraz (B1) dobije se izraz (B2).

$$\begin{aligned} u \cos \lambda &= v \sin \theta \sin \lambda \\ u &= v \sin \theta \tan \lambda \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

Uvrštanjem izraza (B2) u izraz za intenzitet vektora $u^2 + v^2 = |\mathbf{v}|^2$, dobije se (B3).

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}|^2 &= v^2(1 + \sin^2 \theta \tan^2 \lambda) \\ v &= \frac{|\mathbf{v}|}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta \tan^2 \lambda}} \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

Presek sfere sa x, y ravni rezultuje kružnicom poluprečnika R . Jasno je da se na ovoj kružnici udaljenost na y -osi od centra kružnice može računati kao $y_c = R \cos \theta \sin \lambda$, a uz korišćenje jednačine kružnice može se doći do izraza

(B4). Treba primetiti da je udaljenost po x -osi od centra kružnice ujedno poluprečnik kružnice u x, z ravni koja seče sferu, odnosno $x_c = R_c$. Kružnica poluprečnika R_c je ujedno kružnica na kojoj se nalazi vektor \mathbf{v} .

$$\begin{aligned} R_c^2 + y_c^2 &= R^2 \\ R_c &= R\sqrt{1 - \cos^2 \theta \sin^2 \lambda} \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

Intenzitet vektora brzine vetra $|\mathbf{v}|$ je u tom slučaju $|\mathbf{v}| = \frac{2\pi R_c}{T}$, gde je T vremenski period potreban deliću da pređe celu kružnicu, krećući se pritom brzinom $|\mathbf{v}|$. U slučaju kada je poznato da intenzitet vektora brzine na kružnici $R_c = R$ iznosi $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}_0|$, iz *druge osobine polja vetra*, da je ugaona brzina polja vetra na čitavoj sferi ista (period T je isti za svaku vrednost R_c) sledi izraz:

$$|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}_0|\sqrt{1 - \cos^2 \theta \sin^2 \lambda} \quad (\text{B5})$$

Uvrštanjem izraza (B5) u izraz (B3) dobije se izraz za meridijalnu komponentu polja vetra u svakoj tački, a potom se lako izvodi i izraz za zonalnu komponentu vetra.

$$\begin{aligned} v &= |\mathbf{v}_0| \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta \sin^2 \lambda}{1 + \sin^2 \theta \tan^2 \lambda}} \\ &= |\mathbf{v}_0| \sqrt{\frac{\sin^2 \theta \tan^2 \lambda (1 - \cos^2 \theta \sin^2 \lambda)}{1 + \sin^2 \theta \tan^2 \lambda}} \\ u &= |\mathbf{v}_0| \sqrt{\frac{\sin^2 \theta \tan^2 \lambda}{1 + \sin^2 \theta \tan^2 \lambda}} \end{aligned}$$

Biografija



Velibor Želi je rođen 1. novembra 1991. godine, u Novom Sadu. Osnovne studije je završio na Departmanu za Fiziku, smer fizičar-meteorolog 2014. godine.

Oblast interesovanja: *lep život.*

Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet

Ključna dokumentacijska informacija:

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije:

Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa:

Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada:

Master rad

VR

Autor:

Velibor Želi

AU

Mentor:

prof. dr Milica Pavkov-Hrvojević

MN

Naslov rada:

Primena semi-Lagranževe advektivne šeme
na modelovanje pasivne advekcije na
površini sfere

NR

Jezik publikacije:

srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda:

srpski (latinica) / engleski

JI

Zemlja publikovanja:

Srbija

ZP

Uže geografsko područje:

Vojvodina

UGP

Godina:

2015

GO

Izdavač:

Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa:

Prirodno-mateatički fakultet,

MA

Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

Fizicki opis rada:

(poglavlja/strana/citata/tabela/grafika/dodataka)

FO

(3/38/9/0/12/2)

Naučna oblast:

Fizika

NO

Naučna disciplina:

Meteorologija

ND

Ključne reči:

semi-Lagranževa advektivna šema, advekcija
modelovanje, računanje trajektorija na sferi,
interpolacija**KR**

Čuva se:

Biblioteka departmana za fiziku,

ČU

PMF-a u Novom Sadu

Važna napomena:

nema

VN

Izvod:

Prezentovanje rezultata semi-Lagranževe advektivne
šeme za slučaj računanja pasivne advekcije na
površini sfere koristeći predloženu metodu
za računanje trajektorija delića vazduha.**IZ**

Datum prihvatanja teme od NN veća:

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik komisije:

dr Slobodan Radošević

Član:

dr Ilija Arsenić

Član:

dr Milica Pavkov-Hrvojević, mentor

University of Novi Sad
Faculty of Science

Key Words Documentation:

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Documentation type:

Monograph publication

DT

Type of record:

Textual printed material

TR

Content code:

Final paper

CC

Author:

Velibor Želi

AU

Mentor:

prof. dr Milica Pavkov-Hrvojević

MN

Title:

Implementing semi-Lagrangian advection scheme
for modeling of passive advection on the
surface of a sphere

Language of text:

Serbian (latin)

LT

Language of abstract:

english

JI

Country of publication:

Serbia

CP

Locality of publication:

Vojvodina

LP

Publication year:

2015

PY

Publisher:

Author's reprint

PU
Publication place: Prirodno-mateatički fakultet,
PP Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
Physical description: (3/38/9/0/12/2)
PD
Scientific field: Physics
SF
Scientific discipline: Meteorology
SD
Key words:
KW semi-Lagrangian advection scheme, advection,
modeling, trajectory calculation on a sphere,
interpolation
Holding data: Library of Department of Physics
HD PMF-a u Novom Sadu
Note: none
N
Abstract: This paper presents the results of implementing a
AB proposed trajectory calculation of a moving particle on
the surface a sphere in the semi-Lagrangian advection
scheme using both bilinear and bicubic interpolation
method.
Accepted by the Scientific Board:
ASB
Defended on:
DE
Thesis defend board:
DB
President: dr Slobodan Radošević
Member: dr Ilija Arsenić
Member: dr Milica Pavkov-Hrvojević, mentor