задатке урадио: Самир Захировић

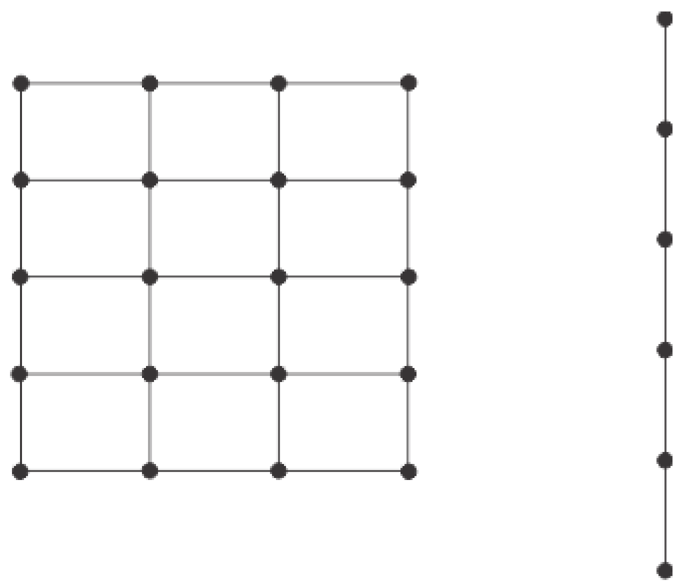
Решења задатака са другог колоквијума из дискретне математике (30.5.2015.)

Група Б

1. а) Одредити број грана у графу $L(P_6 \nabla (P_5 + P_4))$.

   Решење: Граф $H = P_6 \nabla (P_5 + P_4)$ добија се тако што се сваки чвор графа са леве стране на доњој слици повеже са сваким чвором графа са десне стране. На основу тврђења доказаног на предавању знамо да је број грана графа $L(H) = L(P_6 \nabla (P_5 + P_4))$ једнак је:

$$\sum_{v \in V(H)} \binom{\delta(v)}{2} = 4\binom{8}{2} + 10\binom{9}{2} + 6\binom{10}{2} + 2\binom{21}{2} + 4\binom{22}{2} = 2086$$



   б) Да ли је граф $\overline{K_4} \nabla \overline{K_8} \nabla \overline{K_{13}}$ Хамилтоновски?

   Решење: Погледати задатак 1, Хамилтонови графови, вежбе 13. Одговор је не.

   в) За које природне бројеве $d > 1$ постоји стабло са 2016 чворова код кога су сви чворови који нису висећи степена d?

   Решење: Погледати задатак 4, стабла - задаци, вежбе 13.

2. а) Одредити број различитих простих и означених графова са 7 чворова и 6 грана.

   Решење: Број оваквих графова је

$$\binom{\binom{7}{2}}{6} = 54256$$

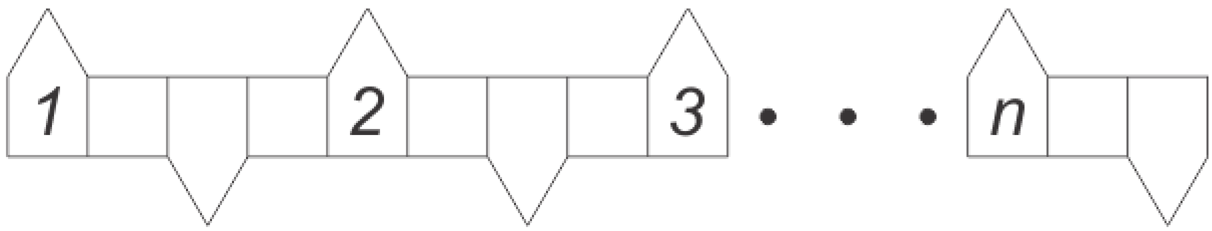
   б) Колико је међу њима повезаних а колико неповезаних? Којих има више?

   Решење: Граф са 7 чвороваи 6 грана је повезан акко је стабло, а број стабала са 7 чворова, по доказаном тврђењу са предавања, је $7^{7-2} = 7^5 = 16807$. Даље, број неповезанох графова је $54226 - 16807 = 37449$.

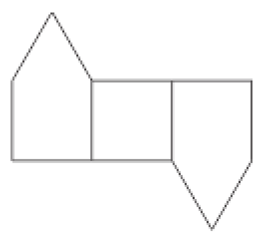
в) Одредити број различитих неозначених графова са 7 чворова и 6 грана.
Решење Погледати графове у прилогу. Има их 41.

г) Колико међу њима има повезаних а колико неповезаних? Којих има више?
Решење Погледати графове у прилогу. Постоји 11 повезаних графова, и 30 неповезаних.

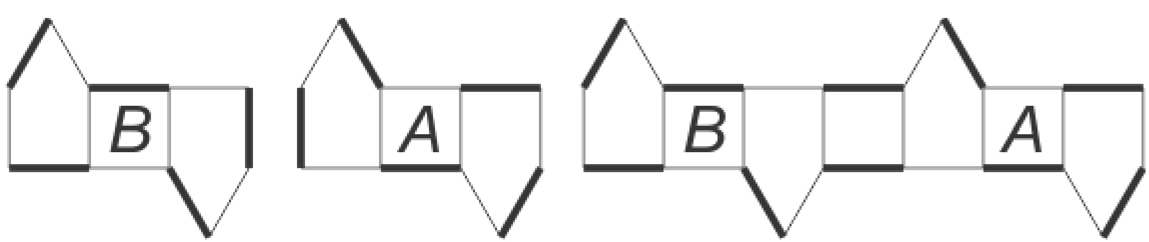
3. Одредити експлицитни израз за број 1-фактора $f(n)$ графа приказаног на слици.



Решење: Означимо најпре задати граф са G_n, и број његових фактора означимо са $f(n)$. Посматрајмо граф G_1 на следећој слици.



Овај граф има два 1-фактора, а они су приказани на наредној слици. Означимо са их са A и B (трећи приказан 1-фактор BA графа G_2 требаће нам касније).



Означимо са $f(n)$ број 1-фактора графа датог у задатку, за неко $n \in \mathbb{N}$. $f(n)$ је могуће изразити помоћу $f(n-1)$ и $f(n-2)$ на следећи начин:

$$f(n) = 2f(n-1) + f(n-2).$$

Да бисмо ово показали посматрајмо произвољан 1-фактор графа G_n. Ако је у овом 1-фактору n-та компонента графа G_n покривена са A, онда се остатак графа G_n може покрити са $f(n-1)$ фактора. Дакле, 1-фактора који n-ту компоненту покривају са A има $f(n-1)$. Слично, број 1-фактора који n-ту компоненту покривају са B има такође $f(n-1)$. Ипак, могуће је да n-та компонента није покривена са A или B, у том случају последње две компоненте покривене су са BA 1-факором са горње слике, а оваквих 1-фактора графа G_n има $f(n-2)$. Дакле важи $f(n) = 2f(n-1) + f(n-2)$.

Даље, лако се проверава да је $f(1) = 2$ и $f(2) = 5$. Преостаје само да се реши рекурентна релација. Коначно ресење је:

$$f(n) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n + \frac{2-\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n.$$

Група А

1. *Решење:* Погледати решење задатка 2, група Б.
2. а) Погледати решење задатка 1, група Б. На сличан начин добија се да је решење 2612.

   б) Да ли је граф $\overline{K_4}\nabla\overline{K_8}\nabla\overline{K_{12}}$ Хамилтоновски?

   Решење: Погледати задатак 1, Хамилтонови графови, вежбе 13. Одговор је да.
3. Погледати ресење задатка 3, група Б. На сличан начин добија се исто решење.