Писмени испит из Функционалне анализе (M & M3)

септембар 2023.

Посматрајмо следеће просторе:

$$\mathcal{C}[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \ f \ \textit{je neprekidna}\},$$

$$s = \{\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}} : \ (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \ x_n = 0\},$$

на којима посматрамо њихове стандардне норме

$$\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad \|\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

1. Дато је пресликавање $A : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ дефинисано са [1]

$$A(f)(x) = \int_0^1 e^{-xt} f(t)dt.$$

   (а) Доказати да је за свако $f \in \mathcal{C}[0,1]$ функција $A(f)$ добро дефинисана.

   (б) Доказати да A пресликава простор $\mathcal{C}[0,1]$ у себе самог.

   (в) Доказати да је A линеаран оператор.

   (г) Доказати да је A ограничен оператор (Дакле, Лапласова трансформација је *непрекидна* операција).

   (д) Доказати да за свако $g \in \mathcal{C}[0,1]$ једначина

$$f(x) = g(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-xt} f(t)dt$$

   има јединствено решење у $\mathcal{C}[0,1]$.

2. (а) Доказати да простор s горе дефинисан није комплетан;

   (б) Наћи његово комплетирање.

Срећно!!! ☻

[1]Ово пресликавање можемо (донекле) схватити као Лапласову трансформацију на коначном домену