Писмени испит из Функционалне анализе М,М3

октобарски рок 2023.

1. Посматрајмо просторе $l^p(\mathbb{R})$ за $p \in [1,+\infty)$, тј.

$$l^p(\mathbb{R}) = \left\{ \langle x_k \rangle \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}.$$

   Посматрајмо пресликавање $\|\cdot\|_p$ дефинисано са

$$\|\langle x_k \rangle\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

   (а) По дефиницији доказати да је $(l^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ Банахов простор за свако $p \in [1,+\infty)$.

   (б) Испитати сепарабилност нормираног простора $(l^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$, $p \in [1,+\infty)$.

   (в) Доказати да на простору $(l^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ постоји скаларни производ који индукује норму $\|\cdot\|_2$, и доказати да на простору $(l^3(\mathbb{R}), \|\cdot\|_3)$ не постоји скаларни производ који индукује норму $\|\cdot\|_3$.

2. Дефинишимо пресликавање $T : (l^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \to (l^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ на следећи начин[1]:

$$T(\langle x_1, x_2, x_3, \ldots \rangle) = \langle 0, x_1, x_2, x_3, \ldots \rangle, \quad \langle x_k \rangle_{k \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{R}).$$

   Показати:

   (а) Пресликавање T је добро дефинисано.

   (б) Пресликавање T је линеарно.

   (в) Пресликавање T је непрекидно.

   (г) Наћи норму пресликавања T.

   (д) Да ли је T контракција?

   (ђ) Ако посматрамо T као пресликавање из простора $(l^3(\mathbb{R}), \|\cdot\|_3)$ у $(l^3(\mathbb{R}), \|\cdot\|_3)$, да ли се неки од претходних резултата (а)-(д) мењају? Образложити одговор.

Срећно!!! ☺

[1] ово пресликавање назива се и *десни померај*