Писмени испит из Функционалне анализе (M & M3)

јун 2023.

Посматрајмо простор ограничених низова у $\mathbb{R}$, тј.

$$l^\infty(\mathbb{R}) = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : (\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\ |x_n| \le M\}.$$

На овом простору уочимо стандардну норму $\|\cdot\|_\infty$ дефинисану са:

$$\|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

1. Доказати да простор $l^\infty(\mathbb{R})$ са нормом $\|\cdot\|_\infty$ није сепарабилан и да сваки густ скуп $W \subseteq l^\infty(\mathbb{R})$ мора бити кардиналости c.

Уочимо скуп

$$V = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : (\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\ |nx_n| \le M\}$$

и пресликавање $\|\cdot\|_{V,\infty} : V \to \mathbb{R}$ дато са

$$\|\{x_n\}\|_{V,\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |nx_n|.$$

2. Доказати да је V потпростор простора $l^\infty(\mathbb{R})$ и да је $\|\cdot\|_{V,\infty}$ норма на V;
3. Доказати да норма $\|\cdot\|_V$ није индукована ниједним скаларним производом; (**упутство**: посматрати низове $\{x_n = \frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{y_n = \frac{1}{n^2}\}_{n\in\mathbb{N}}$)
4. Доказати да је $(V, \|\cdot\|_V)$ Банахов простор; (**помоћ**: затворен потпростор Банаховог простора је Банахов);

Дефинишимо оператор $A : V \to V$ на следећи начин:

$$A(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad y_n = 2x_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

5. Доказати да је A добро дефинисан, линеаран и непрекидан оператор;
6. Наћи $\|A\|$;
7. Доказати да једначина

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{n^3} + \frac{1}{4}\{2x_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ n \in \mathbb{N}$$

има јединствено решење у простору V.

Срећно!!! ☻