Писмени испит из Функционалне анализе (М & М3)

1. 2. 2023.

Посматрајмо простор ограничених функција на интервалу $[1,\infty)$, тј.

$$\mathcal{B}([1,\infty),\mathbb{R}) = \{f : [1,\infty) \to \mathbb{R} : (\exists M > 0)(\forall x \in [1,\infty))\ |f(x)| \le M\}.$$

На овом простору уочимо стандардну норму $\|\cdot\|_\infty$ дефинисану са:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[1,\infty)} |f(x)|.$$

1. Доказати да простор $\mathcal{B}([1,\infty),\mathbb{R})$ са нормом $\|\cdot\|_\infty$ није сепарабилан и да сваки густ скуп $W \subseteq \mathcal{B}([1,\infty),\mathbb{R})$ мора бити кардиналости $2^{\mathfrak{c}}$.

Уочимо скуп

$$V = \{f : [1,\infty) \to \mathbb{R} : (\exists M > 0)(\forall x \in [1,\infty))\ |xf(x)| \le M\}$$

и пресликавање $\|\cdot\|_{V,\infty} : V \to \mathbb{R}$ дато са

$$\|f\|_{V,\infty} = \sup_{x\in[1,\infty)} |xf(x)|.$$

2. Доказати да је V потпростор простора $\mathcal{B}([1,\infty),\mathbb{R})$ и да је $\|\cdot\|_V$ норма на V;
3. Доказати да норма $\|\cdot\|_V$ није индукована ниједним скаларним производом (**упутство**: посматрати функције $f(x) = \frac{1}{x}$ и $g(x) = \frac{1}{x^2}$);
4. Доказати да је $(V, \|\cdot\|_V)$ Банахов простор
(**помоћ**: затворен потпростор Банаховог простора је Банахов);

Дефинишимо оператор $A : V \to V$ на следећи начин:

$$A(f)(x) = f(2x).$$

5. Доказати да је A добро дефинисан, линеаран и непрекидан оператор;
6. Наћи $\|A\|$;
7. Доказати да једначина

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}f(2x),\ x \in [1,\infty),$$

има јединствено решење у простору V.

Помоћ за 5.–7. приметите да се може писати $|xf(2x)| = \frac{1}{2}|(2x)f(2x)|$, као и да $x \in [1,\infty) \Rightarrow 2x \in [1,\infty)$.

Срећно!!! ☺