Писмени испит из Функционалне анализе (М & М3)

4. 4. 2023.

Посматрајмо простор непрекидних функција из $[0,1]$ у $\mathbb{R}$, тј.

$$\mathcal{C}[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \ f \text{ је непрекидна на } [0,1]\}.$$

На овом простору уочимо норме $\|\cdot\|_{max}$ и $\|\cdot\|_2$ дефинисане са:

$$\|f\|_{max} = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 f(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1. По дефиницији доказати да је простор $(\mathcal{C}([0,1], \|\cdot\|_{max})$ Банахов.
2. Доказати да је идентичко пресликавање $I : (\mathcal{C}([0,1], \|\cdot\|_{max}) \to (\mathcal{C}([0,1], \|\cdot\|_2)$ непрекидно;
3. Испитати конвергенцију низа (f_n) у $(\mathcal{C}([0,1], \|\cdot\|_2)$, ако је за свако $n \in \mathbb{N}$ функција f_n задата са
$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \geq \frac{1}{n} \\ nx & x \leq \frac{1}{n} \end{cases}, \quad x \in [0,1];$$
4. Доказати да идентичко пресликавање $I : (\mathcal{C}([0,1], \|\cdot\|_2) \to (\mathcal{C}([0,1], \|\cdot\|_{max})$ није непрекидно;
5. Да ли су $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$ еквивалентне?

Помоћ: под 2 приметити да је једна од две норме увек мања од друге, под 4 искористити 3, а под 5 користити неке од претходно виђених задатака.

Фиксирајмо $x_0 \in [0,1]$. Дефинишимо пресликавање $\delta : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$\delta(f) = f(x_0).$$

6. Доказати да је пресликавање δ [1] добро дефинисано и линеарно;
7. Доказати да је δ непрекидна ако се на $\mathcal{C}[0,1]$ посматра $\|\cdot\|_{max}$ и наћи $\|\delta\|$;
8. (**Бонус**) Доказати да δ није непрекидна ако се на $\mathcal{C}[0,1]$ посматра $\|\cdot\|_2$ (доказати да је $\|\delta\| = \infty$ у том случају).

Срећно!!! ☺

[1] Ово пресликавање се назива делта импулс у тачки x_0. Оно се обично посматра на просторима који су ,,финији" од $C[0,1]$, као што је то нпр. простор глатких функција компактног носача.