Увод у анализу, октобарски рок 2022.

1. Одредити асимптоте ф-је $f(x)=\sqrt{x^2+3x+2}$.

Решење: $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\begin{cases}-1\\-2\end{cases}$

$D_f=(-\infty,-2]\cup[-1,+\infty)$

В.А. $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\sqrt{(-2)^2-3\cdot2+2}=0$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\sqrt{(-1)^2-3\cdot1+2}=0$

$\Rightarrow$ $(-2,0)$, $(-1,0)$ су пуне тачке на графику

Х.А. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\sqrt{\infty}=\infty$

$\Rightarrow$ нема Х.А.

К.А. $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+3x+2}{x^2}}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$

$n=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=$

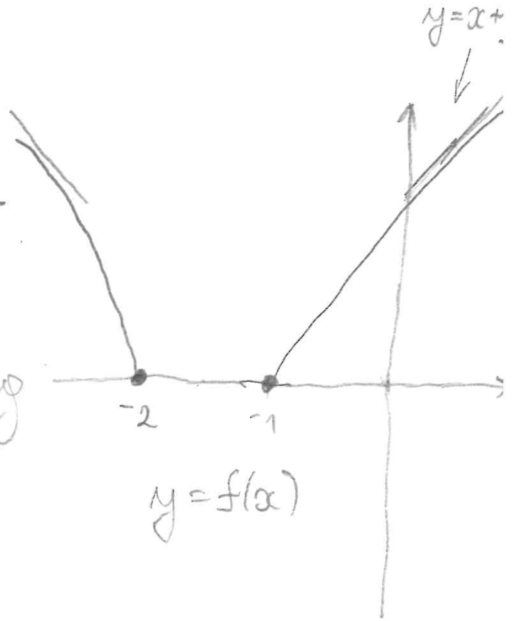
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+3x+2}+x}{-\|-}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+3x+2-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+3x+2}+x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ права $y=x+\frac{3}{2}$ је К.А. кад $x\to+\infty$



$k'=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\cdots=-1$

$n'=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-k'x)=\cdots=-\frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ права $y=-x-\frac{3}{2}$ је К.А. кад $x\to-\infty$.

Напомена: упоредити са задатком 6 са вежби 11.

2. Нека је $A=\{x\in\mathbb{R}: x^4+6x^3+3x^2-26x+24\geq 0\}$ и $X = A\cap(-\infty, 2022)$.

(а) Одредити $\inf X$, $\sup X$, $\min X$, $\max X$.

(б) Наћи X°, $\overline{X}$, ∂X, X', X^{iz}.

Решење:

1	6	3	-26	24	-1, $\cancel{-1}$, $\cancel{-2}$, -3
	1	5	-2	-24	0 ✓
		1	4	-6	-18 ✗
		1	3	-8	-8 ✗
		1	2	-8	0 ✓

$$x^4+6x^3+3x^2-26x+24=(x+1)(x+3)(x^2+2x-8)$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2} \quad \begin{cases} -4 \\ 2 \end{cases}$$

$$p(x)=x^4+6x^3+3x^2-26x+24=(x+1)(x+3)(x+4)(x-2)$$

	$-\infty$ … -4	-4 … -3	-3 … -1	-1 … 2	2 … $+\infty$
$x+4$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$p(x)$	$+$ 0	$-$ 0	$+$ 0	$-$ 0	$+$

Дакле,
$$A=(-\infty,-4]\cup[-3,-1]\cup[2,+\infty),$$
$$X=(-\infty,-4]\cup[-3,-1]\cup[2,2022).$$

(а) $\inf X=-\infty \Rightarrow \min X$ не постоји

$\sup X = 2022\notin X \Rightarrow \max X$ не постоји

(б) $X^\circ=(-\infty,-4)\cup(-3,-1)\cup(2,2022)$

$\overline{X}=X\cup\{2022\}$

$\partial X=\{-4,-3,-1,2,2022\}$

$X^{iz}=\emptyset$

$X'=\overline{X}\setminus X^{iz}=\overline{X}$ □

Напомена: упоредити овај задатак са задатком 1 са вежби 5.

3. Израчунати: (а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{2n-5}$.

Решење: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+5}\right)^{2n-5}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{7}{3n+5}\right)^{-\frac{3n+5}{7}}\right)^{-\frac{7}{3n+5}(2n-5)}$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}-\frac{14n-35}{3n+5}}=e^{-\frac{14}{3}}$$

(б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{\ln(\sqrt[n]{n}-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin n}_{\text{огр.}}\cdot\frac{1}{\ln(\sqrt[n]{n}-1)}=0$ (огр. низ × нула-низ = нула-низ) □

$\frac{1}{\ln 0^+}=0$

4. Видети зад. бр. 7.(а) са вежби 7.

5. Дата је ф-ја f дефинисана на скупу $\mathbb{R}$ са

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2\pi x}{e^x-1}, & x>0, \\ x^3-b, & x\le 0. \end{cases}$$

Наћи непознату константу b тако да f буде непр. на $\mathbb{R}$. Испитати у.н. ф-је f на $\mathbb{R}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 0-}(x^3-b) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin 2\pi x}{e^x-1}$$

$$0^3-b = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}}_{1}\cdot \underbrace{\frac{x}{e^x-1}}_{1}\cdot 2\pi$$

$$-b = 2\pi$$

$$b=-2\pi.$$

Ф-ја није у.н. на $\mathbb{R}$. Узмимо $x_n=-\sqrt[3]{n}$, $y_n=-\sqrt[3]{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$.
Тада $x_n-y_n \longrightarrow 0$ (проверити), али

$f(x_n)-f(y_n) = 1 = const. \not\to 0.$ $\boxtimes$