Писмени испит из Увода у анализу, М и М5 смер

септембар 2022.

1. Нека је $X = \{x \in \mathbb{R} : \ (arctg\frac{1}{x^2})^4 < arctg\frac{1}{x^2}\} \cup \{0\}$.
   (а) Одредити $infX$, $supX$. Да ли постоје $minX, maxX$?
   (б) Одредити $X^\circ, \overline{X}, \partial X, X', X^{iz}$.

   Помоћ: приликом налажења скупа X увести смену $t = arctg\frac{1}{x^2}$, затим решити неједначину $t^4 < t$ и онда „вратити" смену. [20]

2. (а) Доказати индукцијом: $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \cdots + (2n-1) \cdot 2n = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$, $n \in \mathbb{N}$; [10]

   (б) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2+3\cdot 4+\cdots+(2n-1)\cdot 2n}{4n^3}$; [10]

   (в) Објаснити зашто у задатку под (б) не можемо користити теорему која тврди да је „лимес збира једнак збиру лимеса". [10]

3. По дефиницији доказати $\lim\limits_{n\to\infty} \log_2(1 + \frac{1}{n^2+n}) = 0$. [10]

4. Одредити домен и асимптоте графика функције $f(x) = \ln\dfrac{x-1}{x} + x \cdot arctgx$.

   Помоћ: приликом налажења косих асимптота користити идентитет $artgx + arctg\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и таблични лимес $\lim\limits_{t\to 0} \frac{arctgt}{t} = 0$. [20]

5. Одредити све могуће вредности константе C, ако постоје, тако да функција g задата са
$$g(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ C, & x = 0. \end{cases}$$
   буде непрекидна на $\mathbb{R}$. [20]

Задатак за 5 додатних бодова: скицирати график функције f из задатка 4.

Срећно!!! ☺