Увод у анализу, септембар 2022.

1. Нека је $X = \{x \in \mathbb{R} : (\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2})^4 < \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\} \cup \{0\}$.

(а) Одредити $\inf X$, $\sup X$. Да ли постоје $\min X$, $\max X$?

(б) Наћи X°, $\overline{X}$, ∂X, X^{iz}, X'.

Помоћ: увести смену $t = \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}$, решити неједначину $t^4 < t$, и онда „вратити" смену.

Решење: $t = \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}$

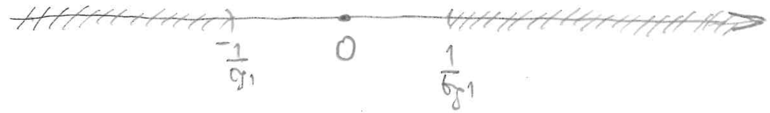
$$t^4 < t$$
$$\iff t(t^3-1) < 0$$

	$-\infty$ … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
t	$-$	$+$	$+$
t^3-1	$-$	$-$	$+$
$t(t^3-1)$	$+$	$-$	$+$

$$t \in (0,1)$$
$$\iff 0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} < 1$$
$$\iff \operatorname{arctg} 0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} < \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}1)$$
$$\underset{\text{arctg је растућа}}{\iff} 0 < \frac{1}{x^2} < \operatorname{tg}1$$

$$\underset{x^2>0}{\iff} \frac{1}{x^2} < \operatorname{tg}1 \quad / \cdot x^2$$
$$\iff \frac{1}{\operatorname{tg}1} < x^2$$
$$\iff x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}1}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}1}}, +\infty\right)$$

Дакле, $X = \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}1}}\right) \cup \{0\} \cup \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}1}}, +\infty\right)$



(а) $\inf X = -\infty \Rightarrow \min X$ не $\exists$

$\sup X = +\infty \Rightarrow \max X$ не $\exists$

(б) $X^\circ = \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}1}}\right) \cup \left(+\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}1}}, +\infty\right)$

$\overline{X} = X \cup \left\{-\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}1}}, \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}1}}\right\}$

$\partial X = \left\{-\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}1}}, 0, \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}1}}\right\}$

$X^{iz} = \{0\}$

$X' = \overline{X} \setminus X^{iz} = \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}1}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}1}}, +\infty\right)$. $\square$

2. (а) Доказати индукцијом

$$(*) \ldots \quad 1\cdot 2 + 3\cdot 4 + \cdots + (2n-1)\cdot 2n = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Решење: База: $n=1$ $\quad 1\cdot 2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$ ✓

Хипотеза: тј. да важи (*)

Корак: $n \rightsquigarrow n+1$:

$$1\cdot 2 + 3\cdot 4 + \dots + (2n-1)\cdot 2n + (2n+1)\cdot(2n+2) \overset{(*)}{=}$$

$$\frac{n(n+1)(4n-1)}{3} + (2n+1)\cdot(2n+2) =$$

$$\frac{n+1}{3}\left(n(4n-1) + 3\cdot 2(2n+1)\right) =$$

$$\frac{n+1}{3}\left(4n^2 - n + 12n + 6\right) = \frac{(n+1)(n+2)(4n+3)}{3}. \quad \checkmark$$

(б) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2 + 3\cdot 4 + \dots + (2n-1)\cdot 2n}{4n^3}$;

Решење: Користећи управо доказано имамо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2 + 3\cdot 4 + \dots + (2n-1)\cdot 2n}{4n^3} \overset{(a)}{=}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)(4n-1)}{3}}{4n^3} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 + \dots}{12n^3} = \frac{4}{12}.$$

(в) У задатку под (б) није могуће искористити теорему која „каже" да је лимес збира једнак збиру лимеса зато што број сабирака није коначан $(n\to\infty)$.

Употреба ове теореме дала би погрешан резултат:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2 + 3\cdot 4 + \dots + (2n-1)\cdot 2n}{4n^3} \overset{!}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2}{4n^3} + \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 4}{4n^3} + \dots +$$

не сме

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\cdot 2n}{4n^3} = 0 + 0 + \dots + 0 = 0 \neq \frac{4}{12}.$$

$\boxtimes$

3. По дефиницији доказати $\lim\limits_{n\to\infty} \log_2\left(1 + \frac{1}{n^2+n}\right) = 0$

Решење: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \quad \log_2\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right) < \varepsilon$

$\varepsilon > 0$ дато; $n_0 = n_0(\varepsilon) = ?$

$$\log_2\left(1 + \frac{1}{n^2+n}\right) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n^2+n} < 2^\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^2+n} < 2^\varepsilon - 1$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n > \frac{1}{2^\varepsilon - 1}$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - \frac{1}{2^\varepsilon - 1} > 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{2^\varepsilon - 1}}}{2}$$

Узмемо $n_0 = \left[\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{2^\varepsilon - 1}}}{2}\right] + 1$

$\boxtimes$

4. Одредити домен и асимптоте графика функције $f(x)=\ln\frac{x-1}{x}+x\cdot\operatorname{arctg}x$.

Помоћ: приликом налажења косих асимптота користити идентитет

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},\quad x>0 \qquad \dots (*)$$

и таблични лимес

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{arctg}t}{t}=1 \qquad \dots (**)$$

Решење: $\frac{x-1}{x}>0$, $x\neq 0,1$

	$-\infty$ … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
x	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x-1}{x}$	$+$	$-$	$+$

$$D_f=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$$

В.А.

$$\lim_{x\to 0-}\left(\ln\frac{x-1}{x}+x\cdot\operatorname{arctg}x\right)= \ln\frac{-1}{0^-}+0= \ln(+\infty)+0=+\infty$$

$\Rightarrow$ $x=0$ је В.А. кад $x\to 0-$

$$\lim_{x\to 1+}\left(\ln\frac{x-1}{x}+x\cdot\operatorname{arctg}x\right)= \ln 0^+ + 1\cdot\frac{\pi}{4}= -\infty+\frac{\pi}{4}=-\infty$$

$\Rightarrow$ $x=1$ је В.А. кад $x\to 1+$.

Х.А.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\ln\frac{x-1}{x}+\overset{\pm\infty}{x}\cdot\overset{\pm\pi/2}{\operatorname{arctg}x}\right)=+\infty$$

К.А.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\overset{0}{\frac{1}{x}}\ln\overset{1}{\frac{x-1}{x}}+\overset{\frac{\pi}{2}}{\operatorname{arctg}x}\right)$$

$$=0\cdot\ln 1+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\overset{1}{\frac{x-1}{x}}+x\cdot\left(\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\overset{(*)}{=}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln 1-\overset{1}{x\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}\right)\overset{(**)}{=}0-1=-1$$

$\Rightarrow$ права $y=\frac{\pi}{2}x-1$ је К.А. кад $x\to+\infty$

$$k'=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\dots=-\frac{\pi}{2}$$

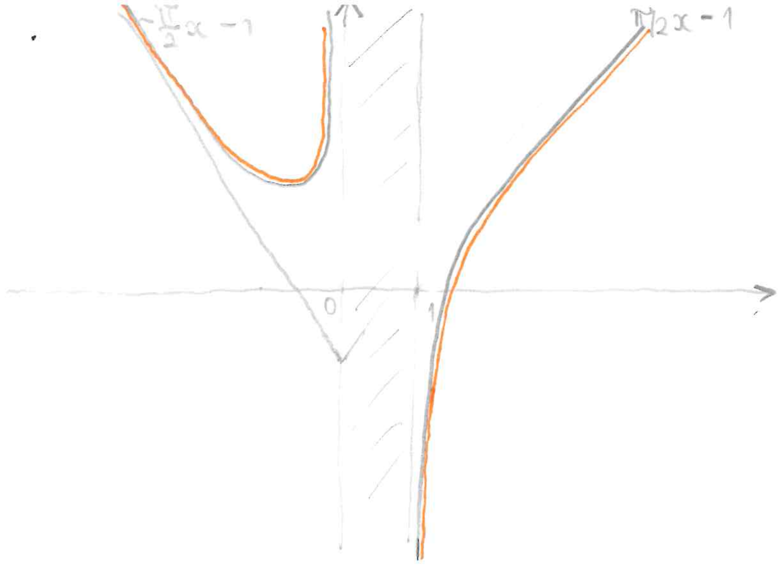
$$n'=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\ln\frac{x-1}{x}+x\cdot\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}x\right)$$

$=$ смена: $x=-t$, $t\to+\infty$ $=\lim_{t\to+\infty}\left(\ln\overset{1}{\frac{-t-1}{-t}}+t\cdot\operatorname{arctg}t-\frac{\pi}{2}t\right)$

$$\overset{(*)}{=}\ln 1-\lim_{t\to+\infty}t\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{t}$$

$$=0-1=-1$$

$\Rightarrow$ права $y=-\frac{\pi}{2}x-1$ је К.А. кад $x\to-\infty$. $\square$



5. Одредити све могуће вредности константе c, ако постоје, тако да ф-ја

$$g(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ c, & x=0,\end{cases}$$

буде непрекидна на $\mathbb{R}$.

Решење: $x_n=\frac{1}{2n\pi}\xrightarrow{n\to\infty}0$

$$y_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$\left.\begin{array}{l} g(x_n)=\cos 0=1\xrightarrow{n\to\infty}1\\ g(y_n)=\cos(\frac{\pi}{2}+2n\pi)=0\xrightarrow{n\to\infty}0\end{array}\right\}\ 1\neq 0$$

$\Rightarrow$ не постоји такво c. $\square$