

Писмени испит из Увода у анализу, М и М5 смер

април 2022.

1. Нека је $X = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{1-|x|} \leq x\}$.

(а) Одредити $\inf X$, $\sup X$. Да ли постоје $\min X$, $\max X$?

(б) Одредити X° , \overline{X} , ∂X , X' , X^{iz} .

2. (а) Одредити све тачке нагомилавања низа $f_n = \sin(\frac{3n\pi}{4})$, $n \in \mathbb{N}$, као и под-низове који им теже. Наћи $\liminf(f_n)$, $\limsup(f_n)$;

(б) Одредити $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2022n) + n^2 + 2^n}{n^{2022n} - n! + 4^n}$.

3. Испитати конвергенцију низа чији је општи члан

$$b_n = \frac{\arctg 1}{1 \cdot 2} + \frac{\arctg 2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\arctg n}{n \cdot (n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Једна идеја: показати да је дати низ Кошијев. Подсећање: $\arctg(x) < \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

4. Одредити домен и асимптоте графика функције $f(x) = -\frac{1}{x} + \arctg(\frac{2x}{1-x^2})$.

5. Испитати униформну непрекидност функције $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ на интервалу $[a, +\infty)$, где је $a > 0$.

Помоћ: користити тригонометријски идентитет $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ и неједнакост $|\sin \alpha| \leq |\alpha|$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Задатак за 5 додатних бодова: скицирати график функције f из 4. задатка.

Сваки задатак носи 20 бодова.

Срећно!!! ☺