Писмени испит из Увода у анализу, јун 2022.

1. Нека је $X = \{x \in \mathbb{R} : e^{\frac{1+x|x|}{x}} \le 1\} \cup \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$.
(а) Одредити $\inf X$, $\sup X$. Да ли постоје $\min X$, $\max X$?
(б) Наћи X°, $\overline{X}$, ∂X, X', X^{iz}.

Решење:

$$e^{\frac{1+x|x|}{x}} \le 1 = e^0$$

$$\iff \frac{1+x|x|}{x} \le 0$$

1° $x > 0$

захтевамо

$$1 + x \cdot \overbrace{|x|}^{=x} \le 0$$

$$1 + x^2 \le 0$$

$$\lightning$$

2° $x < 0$

захтевамо

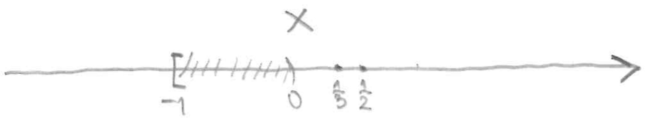
$$1 + x\overbrace{|x|}^{=-x} \ge 0$$

$$1 - x^2 \ge 0$$

$$x^2 \le 1$$

$$\left.\begin{array}{l} x \in [-1, 1] \\ x < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \in [-1, 0)$$

Дакле, $X = [-1, 0) \cup \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$



(а) $\inf X = -1 \in X \Rightarrow \min X = -1$

$\sup X = \frac{1}{2} \in X \Rightarrow \max X = \frac{1}{2}$

(б) $X^\circ = (-1, 0)$, $\overline{X} = X \cup \{0\}$, $\partial X = \{-1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$

$X' = [-1, 0]$, $X^{iz} = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$. $\boxtimes$

2. Одредити:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+2n^2} - n\right)$;

(б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{\ln n + a^n}$, $a > 0$.

Помоћ: под (б) разликовати случајеве $a<1$, $a>1$, $a=1$.

Решење:

(а) $$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+2n^2} - n\right) \cdot \frac{\sqrt[3]{n^3+2n^2}^{\,2} + \sqrt[3]{n^3+2n^2}\cdot n + n^2}{-\,||\,-} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3} + 2n^2 - \cancel{n^3}}{\sqrt[3]{n^3+2n^2}^{\,2} + n \cdot \sqrt[3]{n^3+2n^2} + n^2} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}^{\,2} + \sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} + 1} = \frac{2}{1+1+1} = \frac{2}{3}$$

Напомена: упоредити овај задатак са зад. 5 (б), вежбе 6

(б) $a = 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n + 1} = \frac{1}{\infty} = 0$

$a < 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} a^n \cdot \frac{1}{\ln n + a^n} = 0 \cdot \frac{1}{\infty} = 0 \cdot 0 = 0$

$a > 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{\ln n + a^n} \cdot \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{a^n}} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\ln n}{a^n} + 1} \overset{\text{СДН}}{=} \frac{1}{0+1} = 1$

Дакле,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{\ln n + a^n} = \begin{cases} 0, & a \le 1 \\ 1, & a > 1. \end{cases}$$

$\square$

3. Одредити:

(а) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 + 4x^2 - x - 4}$;

(б) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Решење: (а) Хорнерова шема

1	-6	11	-6	1
	1	-5	6	0 ✓

$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$
$= (x-1)(x-2)(x-3)$

1	4	-1	-4	1
	1	5	4	0

$\Rightarrow x^3 + 4x^2 - x - 4 = (x-1)(x^2 + 5x + 4)$
$= (x-1)(x+4)(x+1)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 + 4x^2 - x - 4} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)(x-3)}{\cancel{(x-1)}(x+4)(x+1)} = \frac{(1-2)\cdot(1-3)}{(1+4)\cdot(1+1)} = \frac{2}{10}$$

Напомена: упоредити овај задатак са зад. 5, вежбе 9

(б) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x} = 1^\infty = \lim\limits_{x\to 0} \left(\left(1 + \cos x - 1\right)^{\frac{1}{\cos x - 1}}\right)^{\frac{\cos x - 1}{\operatorname{tg}^2 x}} =$

$e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 x}} \overset{\text{таблица лимеса}}{=} e^{-\frac{1}{2}}$

Напомена: упоредити са зад. 3 (г) вежбе 10

$\square$

4. Одредити домен ф-је $f(x)=\frac{x}{x+1}\ln\left(1+\frac{1}{|x|}\right)$ и асимптоте њеног графика.

Решење: $x\neq -1, 0$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}=(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,\infty)$.

В.А. $\lim\limits_{x\to -1+} f(x)=\frac{-1}{0^+}\cdot\ln 2=-\infty$

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=\frac{-1}{0^-}\cdot\ln 2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0\pm}\frac{x}{x+1}\ln\left(1+\frac{1}{|x|}\right)=0\cdot\infty=0$

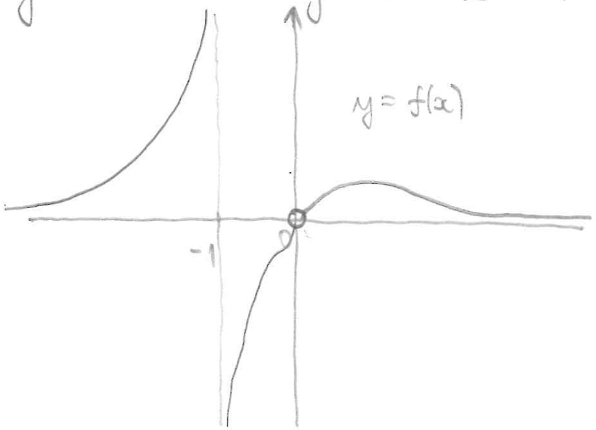
ст. ф-ја надјача лог.

$\Rightarrow$ права $x=-1$ је В.А. кад $x\to -1\pm$
$(0,0)$ је празна тачка кад $x\to 0\pm$

Х.А. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x+1}\ln\left(1+\frac{1}{|x|}\right)=1\cdot\ln 1=0$

$\Rightarrow$ $y=0$ (x-оса) је Х.А. кад $x\to\pm\infty$.

К.А. Нема, јер има Х.А.



5. Посматрајмо функцију $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ задату са

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\frac{1}{1-x^2}}{x}, & 0<x<1,\\ -1, & x=0,\\ 2022, & x=1.\end{cases}$$

Одредити тачке прекида ф-је g. Испитати у. н. ф-је g на $\left[\frac{1}{e^3},\frac{1}{e^2}\right]$.

Решење: ф-ја g је непр. на $(0,1)\Rightarrow$
g је непр. на $\left[\frac{1}{e^3},\frac{1}{e^2}\right]\xRightarrow{К.Т.}$
g је ун. непр. на $\left[\frac{1}{e^3},\frac{1}{e^2}\right]$

Критичне тачке за непрекидност: $x=0$, $x=1$.

$\lim\limits_{x\to 1-}\frac{\ln\frac{1}{1-x^2}}{x}=\frac{\ln\frac{1}{0^+}}{1}=\ln(+\infty)=\infty\neq 2022$

$\Rightarrow$ $x=1$ је тачка прекида (2. врсте)

$\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln\frac{1}{1-x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{-\ln(1-x^2)}{x}=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{-x^2}\cdot(-x)$

$\xlongequal[\text{лимеса}]{\text{таблица}} -1\cdot 0=0\neq g(0)=-1$

$\Rightarrow$ $x=0$ је тачка прекида (отклоњивог). $\boxed{/}$