Увод у анализу, април 2022.

1. Нека је $X = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{x}{1-|x|} \le x \right\}$.

(а) Наћи $\inf X$, $\sup X$. Да ли постоје $\min X$, $\max X$?

(б) Одредити X°, $\overline{X}$, ∂X, X^{iz}, X'.

Решење:

$$\frac{x}{1-|x|} \le x$$

$$\iff \frac{x}{1-|x|} - x \le 0$$

$$\iff \frac{x - x(1-|x|)}{1-|x|} \le 0$$

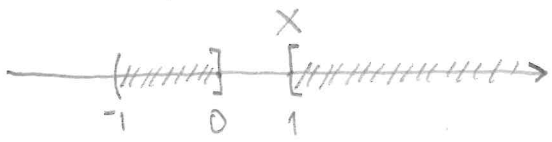
$$\iff \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + x|x|}{1-|x|} \le 0$$

$$\iff \frac{x\overbrace{|x|}^{\ge 0}}{1-|x|} \le 0$$

$$\iff \frac{x}{1-|x|} \le 0$$

	$-\infty$ — -1	-1 — 0	0 — 1	1 — $+\infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$1-\lvert x\rvert$	$-$	$+$	$+$	$-$
$\frac{x}{1-\lvert x\rvert}$	$+$	$-$	$+$	$-$

$$x \in (-1, 0] \cup [1, +\infty) = X$$



(а) $\inf X = -1 \notin X \Rightarrow \min X$ не постоји

$\sup X = +\infty \Rightarrow \max X$ не постоји

(б) $X^{\circ} = (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

$\overline{X} = X \cup \{-1\}$

$\partial X = \{-1, 0, 1\}$

$X^{iz} = \emptyset$

$X' = \overline{X} \setminus X^{iz} = \overline{X}$. $\square$

2. (а) Одредити све т. н. низа $f_n = \sin\frac{3n\pi}{4}$, $n \in \mathbb{N}$, као и поднизове који им теже. Наћи $\liminf(f_n)$, $\limsup(f_n)$.

Решење:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
f_n	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	…

Из таблице читамо:

т. н. су $-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$,

$\liminf(f_n) = -1$,

$\limsup(f_n) = +1$,

$$(f_{4k}) = (f_4, f_8, \dots) \longrightarrow 0,$$
$$(f_{4k+2}) = (f_2, f_{10}, \dots) \longrightarrow -1,$$
$$(f_{8k+1}) = (f_1, f_9, \dots) \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$(f_{8k+5}) = (f_5, f_{13}, \dots) \longrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$(f_{8k+6}) = (f_6, f_{14}, \dots) \longrightarrow 1. \qquad \square$$

(б) Одредити $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2022n) + n^2 + 2^n}{n^{2022n} + n! + 4^n}$.

Решење:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2022n) + n^2 + 2^n}{n^{2022n} + n! + 4^n} \cdot \frac{\frac{1}{n^{2022n}}}{\frac{1}{n^{2022n}}} =$$

најбрже тежи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(2022n)}{n^{2022n}} + \frac{n^2}{n^{2022n}} + \frac{2^n}{n^{2022n}}}{1 + \frac{n!}{n^{2022n}} + \frac{4^n}{n^{2022n}}} \overset{\text{СДН}}{=}$$

$$\frac{0+0+0}{1+0+0} = 0. \qquad \square$$

3. Испитати конвергенцију низа

$$a_n = \frac{\operatorname{arctg} 1}{1\cdot 2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2\cdot 3} + \dots + \frac{\operatorname{arctg} n}{n\cdot(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Једна идеја: доказати да је низ Кошијев.
Помоћ: $\operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Решење: I начин:

(Т) $\{a_n\} \nearrow$ и огр. одозго $\Rightarrow \{a_n\}$ (К)

Очигледно, низ $\{a_n\}$ јесте растући. Докажимо да је огр. одозго:

$$\begin{aligned} a_n &< \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Дакле, $\{a_n\}$ је растући и огр. одозго $\Rightarrow \{a_n\}$ (К)

II начин: $\varepsilon > 0$, $n_0 = ?$ $\forall n \geq n_0$, $\forall p \in \mathbb{N}$ $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left|\frac{\operatorname{arctg}(n+1)}{(n+1)\cdot(n+2)} + \dots + \frac{\operatorname{arctg}(n+p)}{(n+p)(n+p+1)}\right| \\ &\leq \left|\frac{\operatorname{arctg}(n+1)}{(n+1)\cdot(n+2)}\right| + \dots + \left|\frac{\operatorname{arctg}(n+p)}{(n+p)(n+p+1)}\right| \end{aligned}$$

$$\le \frac{\pi/2}{(n+1)\cdot(n+2)} + \cdots + \frac{\pi/2}{(n+p)\cdot(n+p+1)}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \cancel{\frac{1}{n+2}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n+p}} - \frac{1}{n+p+1}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1}\right) < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad n+1 > \frac{\pi}{2\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{\pi}{2\varepsilon} - 1$$

$$n_0 = \left[\frac{\pi}{2\varepsilon} - 1\right] + 1 .$$ ▨

Напомена: упоредити овај задатак са ③(б) Вежбе 8.

④ Наћи домен и асимптоте графика функције

$$f(x) = -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2-1}.$$

Додатни бодови: скицирати график дате ф-је.

Решење: $x \neq 0$, $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$

Дакле, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$
$= (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

Приметимо, f је непарна.

В.А $\quad \lim\limits_{x \to 1+}\left(-\frac{1}{x} + \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2-1}\right) = -1 + \operatorname{arctg}\overbrace{\frac{2}{0^+}}^{=+\infty} = -1 + \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ $\left(1, -1 + \frac{\pi}{2}\right)$ је празна тачка кад $x \to 1+$

$\xRightarrow{f \text{ је неп.}}$ $\left(-1, 1 - \frac{\pi}{2}\right)$ је празна тачка кад $x \to -1-$

$$\lim_{x \to 1-}\left(-\frac{1}{x} + \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2-1}\right) = -1 + \operatorname{arctg}\overbrace{\frac{2}{0^-}}^{=-\infty} = -1 - \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ $\left(1, -1 - \frac{\pi}{2}\right)$ је празна тачка кад $x \to 1-$

$\xRightarrow{f \text{ је неп.}}$ $\left(-1, 1 + \frac{\pi}{2}\right)$ је празна тачка кад $x \to -1+$

$$\lim_{x \to 0+}\left(-\frac{1}{x} + \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2-1}\right) = -\frac{1}{0^+} + \operatorname{arctg} 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0-}\left(-\frac{1}{x} + \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2-1}\right) = -\frac{1}{0^-} + \operatorname{arctg} 0 = +\infty$$

$\Rightarrow$ $x = 0$ је В.А. кад $x \to 0\pm$

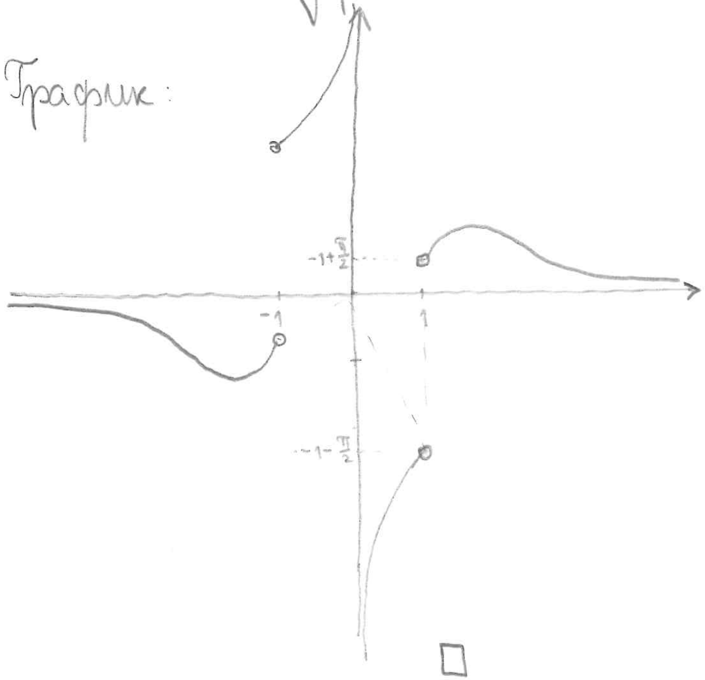
Х.А $\quad \lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(-\overbrace{\frac{1}{x}}^{0} + \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2-1}\right) = \operatorname{arctg}\left(\lim\limits_{x \to \pm\infty}\frac{2x}{x^2-1}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}\right)$

$$= \operatorname{arctg}\left(\lim_{x \to \pm\infty}\frac{\overbrace{\frac{2}{x}}^{0}}{1 - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{1}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ права $y = 0$ (x-оса) је Х.А. кад $x \to \pm\infty$

(К.А) Нема, јер има Х.А.

График:



□

Напомена: упоредити претходни задатак са зад. 8, вежбе 13.

5. Испитати униформну непрекидност функције $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ на интервалу $[a, +\infty)$, $a > 0$.

Помоћ: користити $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ и $|\sin\alpha| \le |\alpha|$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Решење: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow f$ има Х.А. кад $x \to +\infty \Rightarrow f$ је У.Н. на $[a, \infty)$

Докажимо по дефиницији да је f заиста УН на $[a, +\infty)$, $a > 0$.

Нека је $\varepsilon < 0$ дато. $\delta = ?$ $\forall x_1, x_2 \in [a, +\infty)$
$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

$$\left|\sin\frac{1}{x_1} - \sin\frac{1}{x_2}\right| = 2 \cdot \left|\sin\frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}}{2}\right| \cdot \underbrace{\left|\cos\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{2}\right|}_{\le 1}$$

$$\overset{\text{помоћ}}{\le} \cancel{2} \cdot \left|\frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}}{\cancel{2}}\right|$$

$$= \frac{|x_1 - x_2|}{x_1 x_2} \le \frac{1}{a^2}|x_1 - x_2| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x_1 - x_2| < a^2\varepsilon =: \delta.$$

■

Напомена: упоредити овај задатак са 1. задатком из лекције о униформној непр. са вежби.