Писмени испит из Увода у анализу, М и М5 смер

јануар 2022.

1. Нека је $X = \{x \in \mathbb{R} : \ (x-2)\sin^4(\frac{1}{x}) \geq 0\}$.
   (а) Одредити $infX$, $supX$. Да ли постоје $minX, maxX$?
   (б) Одредити $X^\circ, \overline{X}, \partial X, X', X^{iz}$. [20]

2. (а) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{8^n}$;
   Помоћ: Подсећање: $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$;
   Може се користити Стирлингова формула $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, $n \to \infty$;

   (б) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} (n - \sqrt{n^2+1}) \sin\left(\frac{2022^n+1}{n^{2022}-1}\right)$. [20]

3. Нека је дат низ са општим чланом $3a_{n+1} = a_n^2 + 2$, $n \in \mathbb{N}$, $1 < a_1 < 2$.
   Испитати да ли је дати низ конвергентан.
   Ако је конвергентан, одредити његову границу. [20]

4. Одредити домен и асимптоте графика функције $f(x) = \dfrac{2x^2}{2x+1} e^{\frac{1}{x}}$. [20]
   Помоћ: приликом тражења косих асимптота корисно је користити таблични лимес $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} = 0$.

5. Нека је функција $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ дефинисана на следећи начин:
   $$f(x) = \begin{cases} ctgx - \frac{1}{\sin x}, & -1 < x < 0, \\ a, & x = 0, \\ e^{x^2} - 1 & x > 0. \end{cases}$$
   (а) Доказати да постоји константа a тако да је f непрекидна на $(-1, \infty)$;
   (б) Доказати да тако добијена функција није униформно непрекидна на интервалу $(-1, \infty)$, али да јесте униформно непрекидна на интервалу $(0, 2022)$. [20]

Додатни бодови:
Скицирати график функције $f(x) = \frac{2x^2}{2x+1} e^{\frac{1}{x}}$. [5]

Срећно!!! ☻