Писмени испит из Увода у анализу, 27. 1. 2022.

1. Нека је $X=\{x\in\mathbb{R} : (x-2)\sin^4\frac{\pi}{x}\geq 0\}$.

(а) Одредити $\inf X$, $\sup X$. Да ли постоје $\min X$, $\max X$?

(б) Наћи X°, $\overline{X}$, ∂X, X^{iz}, X'.

Решење: $(x-2)\sin^4\frac{\pi}{x}\geq 0$

1° $x-2\geq 0$, $\sin^4\frac{\pi}{x}\geq 0$

$x\geq 2$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$x\geq 2$

2° $x-2\leq 0$, $\sin^4\frac{\pi}{x}\leq 0$

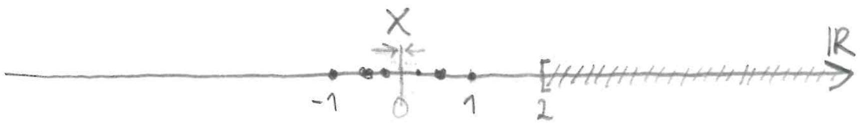
$x\leq 2$, $\sin^4\frac{\pi}{x}=0$

$x\leq 2$, $\frac{\pi}{x}=k\pi$

$x\leq 2$, $x=\frac{1}{k}$

$x=\frac{1}{k}$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$$X=\left\{\tfrac{1}{k} : k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}\cup[2,+\infty)$$



(а) $\inf X=-1\in X \Rightarrow \min X=-1$

$\sup X=+\infty \Rightarrow \max X$ не $\exists$

(б) $X^{\circ}=(2,+\infty)$

$\overline{X}=X\cup\{0\}$

$\partial X=\left\{\frac{1}{k} : k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{0,2\}$

$X^{iz}=\left\{\frac{1}{k} : k\in\mathbb{Z}\right\}$

$X'=\{0\}\cup[2,+\infty)$

$\overline{X}=X'\cup X^{iz}$

2. (а) Израчунати

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{8^n}.$$

(помоћ: Стирлингова ф-ла: $n!\sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$)

(б) Израчунати

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\sin\left(\frac{2022^n+1}{n^{2022}-1}\right).$$

Решење: (а)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{8^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}}{8^n}\overset{\text{СФ}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8^n}\cdot\frac{(2n)^{2n}\cdot e^{-2n}\cdot\sqrt{4\pi n}}{\left(n^n\cdot e^{-n}\cdot\sqrt{2\pi n}\right)^2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{8}\right)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi n}}=0$$

(б) $\lim\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\cdot\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}}=$

$\lim\frac{-1}{n+\sqrt{n^2+1}}=\frac{-1}{\infty}=0$

$\left|\sin\left(\frac{2022^n+1}{n^{2022}-1}\right)\right|\leq 1$

$\rightarrow \lim\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\underbrace{\sin\left(\frac{2022^n+1}{n^{2022}-1}\right)}_{\text{огр.}}=$

(производ нула-низа и огр. низа је нула-низ)

3. Нека је дат низ са општим чланом $3a_{n+1}=a_n^2+2$, $n\in\mathbb{N}$, $1<a_1<2$. Испитати да ли је дат низ конвергентан. Ако јесте наћи му границу.

Решење: показаћемо да је низ монотон и ограничен.

1) огр.: тврдимо $+1 < a_n < 2$, $n \in \mathbb{N}$.

Б.И. $+1 < a_1 < 2$ ✓

И.Х. Нека је $+1 < a_n < 2$, $n \in \mathbb{N}$.

И.К. Онда

$$+1 < a_n < 2 \quad /^2$$
$$1 < a_n^2 < 4 \quad /+2$$
$$3 < \underbrace{a_n^2 + 2}_{3a_{n+1}} < 6 \quad ✓$$
$$1 < a_{n+1} < 2$$

2) мон.: $3a_{n+1} - 3a_n = a_n^2 - 3a_n + 2 = \underbrace{(a_n - 1)}_{>0}\underbrace{(a_n - 2)}_{<0} < 0$

$\Rightarrow \{a_n\}\downarrow$.

$\{a_n\}$ је опадајући и огр.

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$.

$l = ?$

$$3a_{n+1} = a_n^2 + 2 \quad / \lim_{n\to\infty}$$
$$3l = l^2 + 2$$
$$l^2 - 3l + 2 = 0$$

$$l_{1,2} = \frac{+3 \pm 1}{2} \quad \begin{cases} +1 \\ \cancel{2} \end{cases}$$

Није могуће $l = 2$ јер $\{a_n\}\downarrow$.

Следи $l = +1$. ☒

4. Одредити домен и асимптоте графика ф-је $f(x) = \frac{2x^2}{2x+1} e^{\frac{1}{x}}$

Помоћ: приликом тражења косих асимптота, корисно је користити лимес
$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

Решење: $x \neq 0$, $2x+1 \neq 0 \Rightarrow$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0, -\frac{1}{2}\} = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, +\infty)$.

В.А. $\lim_{x\to -\frac{1}{2}+} \frac{2x^2}{2x+1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{2}e^{-2}}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to -\frac{1}{2}-} \frac{2x^2}{2x+1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{2}e^{-2}}{0^-} = -\infty$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ је В.А. кад $x \to -\frac{1}{2}\pm$

експ. ф-ја надјача ст.

$\lim_{x\to 0+} \frac{2x^2}{2x+1} e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot (+\infty) = +\infty$

$\lim_{x\to 0-} \frac{2x^2}{2x+1} e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot \underbrace{e^{-\infty}}_{=0} = 0$

$\Rightarrow$ права $x = 0$ је В.А. кад $x \to 0+$;
$(0,0)$ је празна тачка кад $x \to 0-$.

Х.А. $\lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{\frac{2x^2}{2x+1}}_{\pm\infty} \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{e \to 1} = \pm\infty$

$\Rightarrow$ нема Х.А. кад $x \to \pm\infty$

К.А. $k = \lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{\frac{2x^2}{x(2x+1)}}_{1} \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{1} = 1$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2}{2x+1} e^{\frac{1}{x}} - x\right)$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2 e^{\frac{1}{x}} - 2x^2 - x}{2x+1}\right)$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x}{2x+1}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x(e^{\frac{1}{x}} - 1) - 1}{2 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{0}}$$
$$\overset{\text{помоћ}}{=} \frac{1}{2}\left(2\lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}}_{1} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}(2-1) = \frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow$ $y = x + \frac{1}{2}$ је К.А. кад $x \to \pm\infty$. ▨

5. Нека је ф-ја $f:(-1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ дефинисана на следећи начин:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin x}, & -1 < x < 0, \\ a, & x = 0, \\ e^{x^2} - 1, & x > 0. \end{cases}$$

(а) Доказати да постоји константа $a \in \mathbb{R}$ таква да је f непр. на $(-1,\infty)$;

(б) Доказати да тако добијена ф-ја није ун. непр. на $(-1,+\infty)$, али да јесте ун. непр. на $(0,2022)$

Решење: (а) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(e^{x^2}-1) = e^0 - 1$
$= 0$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\overbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}^{-1/2}\cdot\overbrace{\frac{x}{\sin x}}^{1}\cdot\overbrace{x}^{0} = 0$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{a = 0}$

(б) f непр. на $[0,2022] \xRightarrow{\text{Кантор}} f$ ун. непр. на $[0,2022]$ $\xRightarrow{(0,2022)\subseteq[0,2022]} f$ ун. непр. на $(0,2022)$

Да бисмо показали да f није ун. непр. на D_f довољно је пронаћи низове $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq (-1,+\infty)$ тако да $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, $|f(x_n) - f(y_n)| \geq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Узети $x_n = \sqrt{\ln n}$, $y_n = \sqrt{\ln(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$... ▨