Писмени испит из Увода у анализу, М смер
септембар 2021.

1. Нека је $X = \{ x \in \mathbb{R} : 2x^5+7x^4-3x^3-17x^2+5x+6 \le 0 \}$.
(а) Одредити $\inf X$, $\sup X$. Да ли постоје $\min X$, $\max X$?
(б) Наћи X°, $\overline{X}$, ∂X, X', X^{iz}.

Решење: $p(x) = 2x^5+7x^4-3x^3-17x^2+5x+6$.
Факторишемо $p(x)$ помоћу Безуове теореме:

2	7	-3	-17	5	6	1, 1, ~~-1~~, -2
	2	9	6	-11	-6	0 ✓
		2	11	17	6	0 ✓
			2	9	8	-2 ✗
			2	7	3	0 ✓

Дакле, $p(x) = (x-1)(x-1)(x+2)(2x^2+7x+3)$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \frac{-7 \pm 5}{4} \begin{cases} -3 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 2x^2+7x+3 = 2(x+3)(x+\tfrac{1}{2})$$

Значи,
$$p(x) = 2(x-1)^2(x+2)(x+3)(x+\tfrac{1}{2}) \le 0$$

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,-1/2)$	$-1/2$	$(-1/2,1)$	1	$(1,+\infty)$
$(x-1)^2$	+		+		+		+	0	+
$(x+2)$	−		−	0	+		+		+
$x+3$	−	0	+		+		+		+
$x+\frac{1}{2}$	−		−		−	0	+		+
$p(x)$	−	0	+	0	−	0	+	0	+

$p(x) \le 0 \iff x \in (-\infty,-3] \cup [-2,-\frac{1}{2}] \cup \{1\}$,

$\Longrightarrow$

$$X = (-\infty,-3] \cup [-2,-\tfrac{1}{2}] \cup \{1\}$$

(а) $\inf X = -\infty \Rightarrow \min X$ не постоји,
$\sup X = 1 \in X \Rightarrow \max X = 1$

(б) $X^\circ = (-\infty,-3) \cup (-2,-\frac{1}{2})$,
$\overline{X} = X$
$\partial X = \{-3,-2,-\frac{1}{2},1\}$,
$X' = \overline{X} \setminus \{1\}$,
$X^{iz} = \{1\}$. □

2. Испитати конверг. низа чији је општи чл

$$b_n = \frac{\cos 1}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2}{2\cdot 3} + \dots + \frac{\cos n}{n(n+1)},$$
$n \in \mathbb{N}$.

Решење. Сваки Кошијев низ у $\mathbb{R}$ је конв.

Докажимо да је $\{b_n\}$ Кошијев низ. Нека је $\varepsilon > 0$. Тада

$$|b_{n+p} - b_n| = \left|\left(\frac{\cos 1}{1\cdot 2} + \dots + \frac{\cos n}{n\cdot(n+1)} + \dots + \frac{\cos(n+p)}{(n+p)(n+p+1)}\right) - \left(\frac{\cos 1}{1\cdot 2} + \dots + \frac{\cos n}{n(n+1)}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{\cos(n+p)}{(n+p)(n+p+1)}\right|$$

$$\le \frac{|\cos(n+1)|}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{|\cos(n+p)|}{(n+p)(n+p+1)}$$

$$\le \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \cancel{\frac{1}{n+2}} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{n+p}} - \frac{1}{n+p+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} \le \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 =: n_0.$$

□

Напомена. Упоредити зад. 2 са зад. 3.(б) са вежби 8.

3. Израчунати:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+3n^2} - \sqrt{n^2-5n}\right)$;

(б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$.

Решење: (а) Вежбе 6, зад. 5.(в);
(б) Вежбе 7, зад. 6.(б). □

4. Одредити домен и асимптоте функције $f(x) = \sqrt{x^2+x-2}$.

Напомена: упоредити са зад. 6 са вежби 11

Решење: Домен: $x^2+x-2 \ge 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \quad \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad x^2+x-2 = (x-1)(x+2) \ge 0$$

	$-\infty$	-2		1		$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$	
x^2+x-2	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$D_f = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$$

ВА $\lim\limits_{x\to -2-} f(x) = \sqrt{2^2-2-2} = 0$,

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \sqrt{1^2+1-2} = 0$

$\Rightarrow$ $(-2, 0)$ и $(1, 0)$ су пуне тачке на графику

ХА $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+x-2} = \sqrt{\infty} = \infty$

$\Rightarrow$ f нема ХА

КА $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-}}{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+x-2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

$$= \sqrt{1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x-2} - x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+x-2}+x}{\sqrt{x^2+x-2}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}+x-2-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x-2}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1}$$

$$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ права $y = x + \frac{1}{2}$ је КА кад $x \to +\infty$.

$$k' = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x^2+x-2}{x^2}} = \dots = -1$$

$$n' = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x-2} + x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+x-2} - x}{\sqrt{x^2+x-2} - x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2} + x - 2 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x-2} - x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} - 1} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ права $y = -x - \frac{1}{2}$ је КА кад $x \to -\infty$. $\square$

⑤ Наћи $a, b \in \mathbb{R}$ тако да f, g буду непрекидне на $[0, \frac{\pi}{4})$, ако је

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}, & 0 < x < \frac{\pi}{4}, \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(\sin 2x)}{x^2}, & 0 < x < \frac{\pi}{4}, \\ b, & x = 0. \end{cases}$$

Решење: $\lim_{x\to0+} g(x) = \lim_{x\to0+} \frac{\ln \sin 2x}{x^2}$

$$= \frac{\ln 0}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty,$$

па g не може да се продужи непрекидно.

$$a = \lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} \frac{\ln(\cos 2x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to0+} \frac{\ln(1+\cos 2x - 1)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to0+} \frac{\ln(1+\cos 2x-1)}{\cos 2x - 1} \cdot \frac{\cos 2x - 1}{x^2}$$

$$= -\lim_{x\to0+} \frac{2\sin^2 x}{x^2} = -2,$$

користими смо табличне лимесе. $\square$