Писмени испит из Увода у анализу, јуни 2021.

1) $X = \{x \in \mathbb{R} : \ln(\frac{1}{x^4}) \geq \sqrt[4]{\ln(\frac{1}{x^4})}\}$.

(а) $\inf X$, $\sup X$, $\min X$, $\max X = ?$

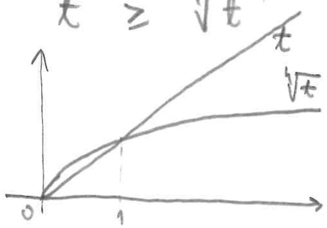
(б) X°, $\overline{X}$, ∂X, X' и X^{iz}.

Напомена: упоредити са трећим задатком са вежби 5.

Решење: $x \neq 0$!

Смена: $\ln(\frac{1}{x^4}) = t$

$$\ln\left(\frac{1}{x^4}\right) \geq \sqrt[4]{\ln\left(\frac{1}{x^4}\right)} \iff$$
$$t \geq \sqrt[4]{t}$$



Са графика видимо:

$$t \geq \sqrt[4]{t} \iff$$
$$t \in \{0\} \cup [1, \infty) \iff$$

$$\ln\Big(\overbrace{\frac{1}{x^4}}^{=x^{-4}}\Big) \in \{0\} \cup [1, \infty) \iff$$
$$-\ln(x^4) \in \{0\} \cup [1, \infty) \iff$$
$$\ln x^4 \in (-\infty, -1] \cup \{0\} \iff$$
$$x^4 \in (0, e^{-1}] \cup \{1\} \iff$$
$$x \in [-\sqrt[4]{e^{-1}}, 0) \cup (0, \sqrt[4]{e^{-1}}] \cup \{1\}$$

$$\Longrightarrow X = \left[-\frac{1}{\sqrt[4]{e}}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right] \cup \{1\}$$

(а) $\inf X = -\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \in X \Rightarrow \min X = -\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$

$\sup X = 1 \in X \Rightarrow \max X = 1$

(б) $X^\circ = \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{e}}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)$

$\overline{X} = X \cup \{0\}$

$\partial X = \{-\frac{1}{\sqrt[4]{e}}, 0, \frac{1}{\sqrt[4]{e}}, 1\}$

$X' = \left[-\frac{1}{\sqrt[4]{e}}, \frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right]$

$X^{iz} = \{1\}$. $\square$

2) $2 < a_1 < 5$, $7a_{n+1} = a_n^2 + 10$, $n \in \mathbb{N}$.

Напомена: упоредити са зад. 7 (г), вежбе 7

Решење: Т Опадајући, огр. одоздо низ је конв.

1. Показујемо: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 < a_n < 5$

Индукција:

Б.И. $n = 1$: $2 < a_1 < 5$ ✓ дато у задатку

И.Х. Нека је $2 < a_n < 5$ за $n \in \mathbb{N}$.

И.К. Тада је

$$2 = \frac{2^2+10}{7} < a_{n+1} = \frac{a_n^2+10}{7} < \frac{5^2+10}{7} = 5.$$

2. Показујемо $\{a_n\}\downarrow$ тј. $a_n - a_{n+1} >$

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2+10}{7} = \frac{7a_n - a_n^2 - 10}{7}$$
$$= -\frac{1}{7}(a_n^2 - 7a_n + 10)$$
$$= -\frac{1}{7}\underbrace{(a_n - 2)}_{>0}\underbrace{(a_n - 5)}_{<0} > 0$$

Према Т $\uparrow$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

$l = ?$

$$7a_{n+1} = a_n^2 + 10 \quad / \lim_{n\to\infty}$$

$$7l = l^2 + 10 \iff$$
$$l^2 - 7l + 10 = 0$$
$$l_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$$

$l = 5$ је немогуће пошто $\{a_n\} \downarrow \implies \boxed{l = 2.}$ □

3. (а) Нека је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Онда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n}}{\ln n} \underset{\{\ln n\} \nearrow +\infty}{\overset{ШТ}{=}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\cancel{\frac{x_1}{1}} + \cancel{\frac{x_2}{2}} + \dots + \frac{x_{n+1}}{n+1}\right) - \left(\cancel{\frac{x_1}{1}} + \cancel{\frac{x_2}{2}} + \dots + \cancel{\frac{x_n}{n}}\right)}{\ln(n+1) - \ln n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x_{n+1}}{n+1}}{\ln \frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{\ln \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}_{e}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}}{\ln e} = x.$$

(б) Напомена: упоредити са зад. 3.(g), вежбе (10).

Решење: $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x + d^x}{4}\right)^{\frac{1}{x}} =$

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{a^x - 1 + b^x - 1 + c^x - 1 + d^x - 1}{4}\right)^{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \Bigg(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{\frac{4}{a^x + b^x + c^x + d^x - 4}}\right)^{\frac{4}{a^x + b^x + c^x + d^x - 4}}}_{e}\Bigg)^{\frac{a^x + b^x + c^x + d^x - 4}{4x}} =$$

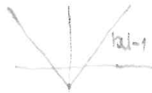
$$e^{\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{a^x-1}{x}}_{\ln a} + \underbrace{\frac{b^x-1}{x}}_{\ln b} + \underbrace{\frac{c^x-1}{x}}_{\ln c} + \underbrace{\frac{d^x-1}{x}}_{\ln d}\right)} \overset{(9)}{=} e^{\frac{1}{4}\ln(abcd)} =$$

$$\sqrt[4]{abcd}.$$ □

(4) $f(x) = 2\ln\left(\frac{|x|-1}{x}\right) - 9\left(x + \frac{1}{2}\right)$

Решење:

	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
$\lvert x\rvert - 1$	+	−	−	+
x	−	−	+	+
$\frac{\lvert x\rvert-1}{x}$	−	+	−	+



$$D_f = (-1, 0) \cup (1, +\infty)$$

В.А критичне тачке: $\{-1, 0, 1\}$

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = 2\underbrace{\ln\left(\overbrace{\frac{0^-}{-1}}^{0^+}\right)}_{=-\infty} - 9\left(-1 + \frac{1}{2}\right)$$
$$= -\infty + 9 - \frac{9}{2} = -\infty$$

$\implies$ права $x = -1$ је В.А

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = 2\ln\left(\overbrace{\frac{-1}{0^-}}^{+\infty}\right) - 9\left(0 + \frac{1}{2}\right)$$
$$= +\infty$$

$\implies$ права $x = 0$ је В.А.

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = 2\ln\left(\frac{0^+}{1}\right) - 9\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$
$$= -\infty$$

$\implies$ права $x = 1$ је В.А

Х.А $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) =$

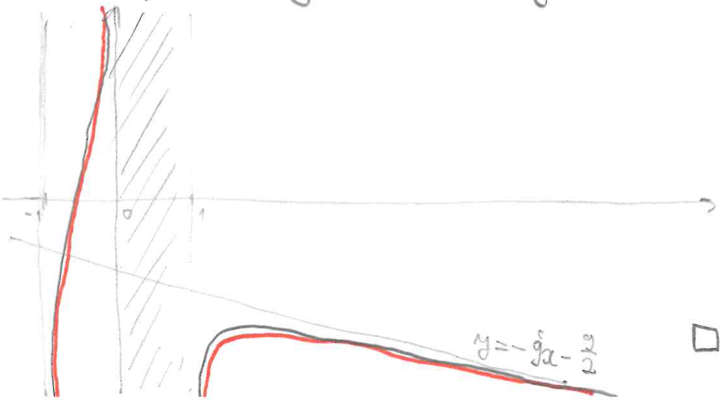
$$2\ln(1) - 9\left(+\infty + \frac{1}{2}\right) = 0 - \infty = -\infty$$

$\implies$ нема Х.А

К.А $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2\ln\frac{x-1}{x}}{x} - 9 - \frac{9}{2x}\right) = \frac{0}{\infty} - 9 - 0 = -9$

$n = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2\ln\frac{x-1}{x} - \cancel{9x} - \frac{9}{2} + \cancel{9x}\right) = 0 - \frac{9}{2} = -\frac{9}{2}$

$\implies$ права $y = -9x - \frac{9}{2}$ је К.А.



□

Напомена. Упоредити овај задатак са задатком ③, вежбе 11

⑤ $g(x) = \begin{cases} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^{2021}, & x \neq 0, \\ C, & x = 0. \end{cases}$

Напомена: упоредити са зад. ③, вежбе 12.

Решење. Ако би постојало непр. продужење, важило би $C = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos \frac{1}{x_n}\right)^{2021}$, за сваки низ $\{x_n\}$ који тежи ка нули. Међутим,

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\cos \frac{1}{x_n}\right)^{2021} = 0$$

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\cos \frac{1}{x_n}\right)^{2021} = 1$$

$0 \neq 1$ ↯. $\square$