Увод у анализу, М смер

Април 2021.

1) Нека је $A=\{x\in\mathbb{R}:\ x+\frac{1}{|x|}\geq 2\}$

а $B=\{x\in\mathbb{R}:\ \sin\left(\frac{1}{x+1}\right)=0 \wedge x<-1\}$.

Ставимо $X=A\cup B$.

(а) $\inf X$, $\sup X=?$ $\min X$, $\max X=?$;

(б) X°, $\overline{X}$, ∂X, X', X^{iz}.

Решење: (а) $A=?$

$x\neq 0$!

$$x+\frac{1}{|x|}\geq 2$$

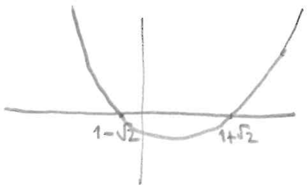
$x>0$:

$x+\frac{1}{x}\geq 2 \ /\cdot x$

$x^2+1\geq 2x$

$x^2-2x+1\geq 0$

$(x-1)^2\geq 0$ ✓



$x<0$:

$x-\frac{1}{x}\geq 2 \ /\cdot(x)$

$x^2-1\leq 2x$

$x^2-2x-1\leq 0$

$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=$

$=1\pm\sqrt{2}$

$x\in[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]\setminus\{0\}$

$x\in[1-\sqrt{2},0)\cup\cancel{(0,1+\sqrt{2}]}$

Али $x<0$!

$$\Rightarrow \boxed{A=(0,\infty)\cup[1-\sqrt{2},0)=[1-\sqrt{2},0)\cup(0,\infty)}$$

$B=?$

$\sin\frac{1}{x+1}=0 \iff \frac{1}{x+1}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \wedge x\neq -1$

$\iff x+1=\frac{1}{k\pi},\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\} \wedge x\neq-1$

$\iff x=-1-\frac{1}{k\pi},\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\} \wedge x\neq-1$

$\iff x=-1-\frac{1}{k\pi},\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}=\mathbb{N}\cup(-\mathbb{N})$

Мора $x<-1$. Следи $\boxed{B=\{-1-\frac{1}{k\pi}:\ k\in\mathbb{N}\}}$

Дакле, $X=A\cup B=\boxed{\{-1-\frac{1}{k\pi}:\ k\in\mathbb{N}\}\cup[1-\sqrt{2},0)\cup(0,+\infty)}$.

(а) $\sup X=+\infty \Rightarrow \max X$ не постоји

$\inf X=-1-\frac{1}{1\cdot\pi}=-1-\frac{1}{\pi}\in X \Rightarrow \inf X=\min X$

(б) $X^\circ=(1-\sqrt{2},0)\cup(0,+\infty)$,

$\overline{X}=X\cup\{-1,0\}$

$\partial X=\{-1-\frac{1}{k\pi}:\ k\in\mathbb{N}\}\cup\{-1,0,1-\sqrt{2}\}$

$X'=\{-1\}\cup[1-\sqrt{2},+\infty)$

$X^{iz}=\{-1-\frac{1}{k\pi}:\ k\in\mathbb{N}\}$. $\square$

2) Познато је да је $2^n < n! < n^n$, $n \to \infty$. Дати су низови
$f_n = \ln(2^n)$, $g_n = \ln(n!)$, $h_n = \ln(n^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Да ли и даље важи поредак $f_n < g_n < h_n$. Ако не, упоредити низове f_n, g_n и h_n помоћу симбола $\sim$ и $<$.
(Помоћ: Стирлингова ф-ла)

Решење:

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}, \quad n \to \infty$$

← Стирлинг

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g_n}{f_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)}{\ln 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})}{\ln 2^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^n) + \ln(e^{-n}) + \ln(\sqrt{2\pi n})}{n \cdot \ln 2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \ln n - n \cdot \ln e + \frac{1}{2}\ln(2\pi n)}{n \cdot \ln 2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \overbrace{\frac{\ln n}{\ln 2}}^{+\infty} - \frac{\overbrace{\ln e}^{=1}}{\ln 2} + \lim_{n\to\infty} \overbrace{\frac{\ln(2\pi n)}{n \ln 2}}^{0,\ \text{СДН}}$$

$$= +\infty - \frac{1}{\ln 2} + 0 = +\infty.$$

Дакле $\lim \frac{g_n}{f_n} = +\infty \Rightarrow f_n < g_n$, $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{g_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^n)}{\ln(n!)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \ln n}{\ln(e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \ln n}{\ln(e^{-n}) + \ln(n^n) + \ln(\sqrt{2\pi n})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \ln n}{-n + n \cdot \ln n + \ln\sqrt{2\pi n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n \cdot \ln n}}{\cancel{n \cdot \ln n}\left(-\frac{1}{\ln n} + 1 + \frac{\frac{1}{2}\ln 2\pi n}{\ln n \cdot n}\right)}$$

$$= \frac{1}{-0 + 1 + 0} = 1 \Rightarrow h_n \overset{n\to\infty}{\sim} g_n.$$

Закључак: $f_n < g_n \sim h_n$, $n \to \infty$. □

3 (а) Изр.
$$\lim_{x\to-\infty} \ln(x + \sqrt{x^2 - 2x}) \frac{\sin(2021x)}{(\cos x)^{2021} + 2021};$$

Решење: Тврдимо

$$\left.\begin{array}{l} \ln(x + \sqrt{x^2-2x}) \xrightarrow{x\to-\infty} 0 \\ \dfrac{\sin(\ )}{(\cos x)^{2021} + 2021} \quad \text{огр.} \end{array}\right\} \overset{(T)}{\Rightarrow} \lim_{x\to-\infty} \dots = 0$$

- $\lim_{x\to-\infty} \ln(x + \sqrt{x^2-2x}) =$

$$\lim_{x\to-\infty} \ln \frac{(x + \sqrt{x^2-2x})(x - \sqrt{x^2-2x})}{x - \sqrt{x^2-2x}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{\cancel{x^2} - (\cancel{x^2} - 2x)}{x - \sqrt{x^2-2x}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \ln \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \underbrace{\frac{2}{x}}_{0}}} = \ln\frac{2}{2} = 0$$

- $-1 \le \sin(2021x) \le 1$

$2020 \le (\cos x)^{2021} + 2021 \le 2022$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2020} \le \frac{\sin(\ )}{(\cos x)^{2021} + 2021} \le \frac{1}{2020}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\ )}{(\cos x)^{2021} + 2021} \quad \text{огр.}$$

□

(б) Изр. $\lim_{n\to\infty} (2\sqrt[n]{e} - 1)^n$.

Помоћ: $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e} - 1) = 1$.

$$\lim_{n\to\infty} (2\sqrt[n]{e} - 1)^n = 1^\infty = ? =$$

$$\lim_{n\to\infty} (1 + 2\sqrt[n]{e} - 2)^n =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\overbrace{\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt[n]{e} - 2}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt[n]{e}-2}}}^{e}\right)^{n \cdot (2\sqrt[n]{e} - 2)}$$

$$= e^{2 \cdot \lim_{n\to\infty} n \cdot (\sqrt[n]{e} - 1)} \overset{\text{помоћ}}{=\!=} e^2.$$

□

Додатни бодови: доказати
$$\lim_{n\to\infty} n\cdot(\sqrt[n]{e}-1) = 1.$$

Решење: I начин: теорема о укљ. низовима, видети вежбе 7, зад. 5

II начин:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = 1 \xRightarrow{x=\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1 \iff \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e}-1) = 1.$$

□

4) Одредити пр. домен и асимптоте графика ф-је
$$f(x) = \frac{x-2}{x+2}\, e^{-\frac{4}{x}}.$$

Решење: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2,0\} = (-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$.

ВА
$$\lim_{x\to -2-}\frac{x-2}{x+2}\, e^{-\frac{4}{x}} = \frac{-4}{0^-}\cdot e^{2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -2+}\frac{x-2}{x+2}\, e^{-\frac{4}{x}} = \frac{-4}{0^+}\cdot e^{2} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{x-2}{x+2}\, e^{-\frac{4}{x}} = \frac{-2}{2}\, e^{-\frac{4}{0^-}} = -e^{+\infty} = -\infty$$

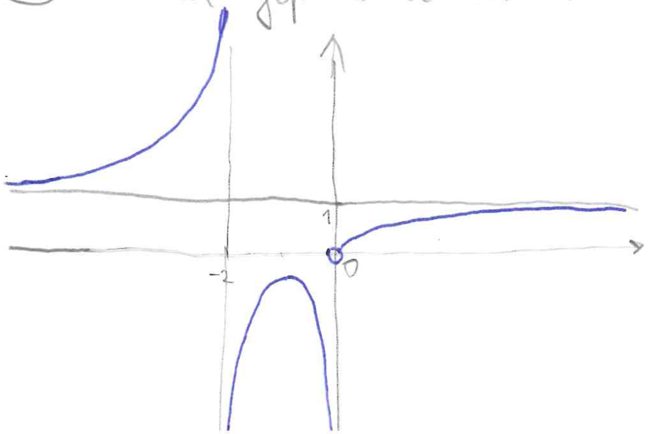
$$\lim_{x\to 0+}\frac{x-2}{x+2}\, e^{-\frac{4}{x}} = \frac{-2}{2}\, e^{-\frac{4}{0^+}} = -e^{-\infty} = 0$$

$\Longrightarrow$ права $x=-2$ је ВА кад $x\to -2\pm$;
права $x=0$ је ВА кад $x\to 0-$;
$(0,0)$ је празна тачка кад $x\to 0+$.

Х.А $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1\cdot 0 = 1$

$\Longrightarrow$ $y=1$ је ХА кад $x\to\pm\infty$.

К.А Нема, јер има Х.А.



5) Дата је f деф. на $[0,\frac{\pi}{2}]$ и непознати параметри $a>0$, $b\in\mathbb{R}$. Ако је

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(2x)\cdot\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-x), & 0\le x<\frac{\pi}{4},\\ b, & x=\frac{\pi}{4},\\ \frac{1-(\sin 2x)^{a}}{x-\pi/4}, & \frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

наћи a и b тако да f буде непр.

Решење: $b = \lim_{x\to\pi/4-}\operatorname{tg}(2x)\cdot\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-x) \overset{\text{вежбе 10, зад. 2}}{=} \frac{1}{2}$

$$b = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}\frac{1-(\cos(x-\frac{\pi}{4}))^{a}}{(x-\frac{\pi}{4})^{2}} = \quad \text{смена: } t = x-\frac{\pi}{4},\ t\to 0+$$

$$= \lim_{t\to 0+}\frac{1-(\cos t)^{a}}{t^{2}} \overset{\text{вежбе 10, зад. 2}}{=} \frac{a}{2}$$

$b = \frac{1}{2}$

$b = \frac{a}{2} \Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{2} \Longrightarrow a = 1$

$$\boxed{a=1,\ b=\frac{1}{2}}$$

□