Увод у анализу, 28.01.2021.

① (20 бодова) Нека је $X = \{ x \in \mathbb{R} \setminus [0, \frac{1}{3}] : \ 0 < \frac{1}{x} \cdot [x] \leq 1 \}$.

(а) Одредити $\inf X$, $\sup X$. Да ли постоје $\min X$, $\max X$?

(б) Наћи $\overline{X}$, X°, ∂X, X^{iz}, X'.

Решење: $X = ?$

I $x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$: $\quad 0 < \frac{1}{x} \cdot [x] \leq 1$

1° $\quad \frac{1}{x} \cdot [x] \leq 1 \quad / \cdot x$

$\quad [x] \leq x$ ✓ ← увек тачно

2° $\quad \frac{1}{x} \cdot [x] > 0 \quad / \cdot x$

$\quad [x] > 0$ ← ово важи за $x \geq 1$.

$\Rightarrow X_1 = [1, +\infty)$.

II $x \in (-\infty, 0)$: $\quad 0 < \frac{1}{x} \cdot [x] \leq 1$

мења се знак

1° $\quad \frac{1}{x} \cdot [x] \leq 1 \quad / \cdot x < 0$

$\quad [x] \geq x$

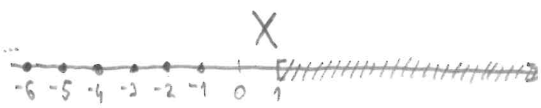
$\Longrightarrow [x] = x, \quad x = -k, \quad k \in \mathbb{N}$

2° $\quad \frac{1}{x} \cdot [x] > 0 \quad / \cdot x$

$\quad [x] < 0$ ← увек тачно за $x \in (-\infty, 0)$

$\Rightarrow X_2 = \{ -k : k \in \mathbb{N} \}$

$\Rightarrow \quad X = X_1 \cup X_2 = \{ -k : k \in \mathbb{N} \} \cup [1, +\infty)$.



(а) $\inf X = -\infty \Rightarrow \min X$ не постоји,

$\sup X = +\infty \Rightarrow \max X$ не постоји

(б) $\overline{X} = X$,

$X^\circ = (1, +\infty)$,

$\partial X = \{ -k : k \in \mathbb{N} \} \cup \{1\}$

$X^{iz} = \{ -k : k \in \mathbb{N} \}$

$X' = [1, +\infty)$. □

② Доказати да је низ $\{2^{-n}\cos(n\pi)\}_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев. ... [10]

Решење:

I начин:
$$\left.\begin{array}{l}\{2^{-n}\} \text{ нула-низ} \\ \{\cos n\pi\} \text{ огр. низ}\end{array}\right\} \overset{\text{Т}\uparrow}{\Longrightarrow} \{2^{-n}\cos n\pi\} \text{ нула-низ}$$
$$\Longrightarrow \{2^{-n}\cos n\pi\} \text{ конвергентан}$$
$$\overset{\text{Т}\uparrow}{\Longrightarrow} \{2^{-n}\cos n\pi\} \text{ Кошијев.}$$

II начин: Питамо се: $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0\ \forall p\in\mathbb{N}\ |x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$, $x_n = 2^{-n}\cos(n\pi)$, $n\in\mathbb{N}$. Нека је $\varepsilon>0$. Тражимо n_0.

$$|x_{n+p}-x_n| = |2^{-n-p}\cos((n+p)\pi) - 2^{-n}\cos(n\pi)| =$$
$$= 2^{-n}\left|\frac{\cos(n+p)\pi}{2^p} - \cos(n\pi)\right| \leq$$

неједнакост троугла

$$2^{-n}\left(\frac{|\cos(n+p)\pi|}{2^p} + |\cos(n\pi)|\right) \leq$$
$$2^{-n}\left(\underbrace{\frac{1}{2^p}}_{<1} + 1\right) \leq 2^{-n}\cdot 2 = 2^{-n+1} = \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < 2^{n-1} \quad / \log_2$$
$$\iff \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < n-1$$
$$\iff n > \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+1$$
$$\Longrightarrow n_0 = \left[\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+1\right]+1.$$

□

③ Наћи природни домен и асимптоте графика функције
$$f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}x\,\mathrm{arctg}\,x.$$
(помоћ: $\mathrm{arctg}\,x + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, $x>0$). ... [20]

Решење: $\frac{x-1}{x+1} > 0$

	$-\infty$ … -1	-1 … 1	1 … $+\infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x-1}{x+1}$	$+$	$-$	$+$

$\Longrightarrow D_f = (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

В.А. $\lim\limits_{x\to-1^-}\left(\frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}x\,\mathrm{arctg}\,x\right) = \frac{1}{4}\ln\underbrace{\frac{-2}{0^-}}_{+\infty} - \frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \infty - \frac{\pi}{8} = +\infty.$

$$\lim_{x\to 1+}\left(\frac14\ln\frac{x-1}{x+1}-\frac12 x\operatorname{arctg}x\right)=\frac14\ln\frac{0^+}{\underset{0^+}{\underbrace{2}}}-\frac12\cdot 1\cdot\operatorname{arctg}1=-\infty-\frac12\cdot\frac{\pi}{4}=-\infty$$

$\Rightarrow$ праве $x=-1$ и $x=1$ су В. А. кад $x\to -1-$ и $x\to 1+$.

Х. А $\quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac14\ln\frac{x-1}{x+1}-\frac12 x\operatorname{arctg}x\right)=-\frac12\cdot(\pm\infty)\cdot\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=\mp\infty$

$\Rightarrow$ Х. А. не постоје

К. А. $\quad k=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac14\cdot\frac1x\cdot\ln\frac{x-1}{x+1}-\frac12\operatorname{arctg}x\right)=0-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$

$n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac14\ln\frac{x-1}{x+1}-\frac12 x\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{4}x\right)=$ $\quad \operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac1x,\ x\to+\infty$

$0+\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac12 x\left(\cancel{\frac{\pi}{2}}-\operatorname{arctg}\frac1x\right)+\cancel{\frac{\pi}{4}x}\right)=$

$\lim_{x\to+\infty}\frac12 x\operatorname{arctg}\frac1x=\frac12\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac1x}{\frac1x}\overset{(4.)}{=}\frac12\cdot1=\frac12$

$\Rightarrow$ права $y=-\frac{\pi}{4}x+\frac12$ је К. А. кад $x\to+\infty$.

$k'=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac14\cdot\frac1x\cdot\ln\frac{x-1}{x+1}-\frac12\operatorname{arctg}x\right)=0-\frac12\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$

$n'=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac14\ln\frac{x-1}{x+1}-\frac12 x\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{4}x\right)=$ $\quad$ смена: $x=-t$, $t\to+\infty$

$0+\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac12 t\operatorname{arctg}t+\frac{\pi}{4}t\right)=n=\frac12$

$\Rightarrow$ права $y=\frac{\pi}{4}x+\frac12$ је К. А. кад $x\to-\infty$. $\square$

(4) Израчунати следеће лимесе:

(а) $\lim_{n\to\infty}(\ln(n+1)-\ln n)^{\frac{1}{\ln n}}$; ... [10]

(б) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2+1}}\left(2!+\frac{(2+1)!}{1!}+\dots+\frac{(2+n)!}{n!}\right)$, ... [10]

Решење: (а) $\lim_{n\to\infty}(\ln(n+1)-\ln n)^{\frac{1}{\ln n}}=0^0=?=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln n}}=$

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\ln\frac{n+1}{n}\right)\cdot\frac{1}{\ln n}+1-1} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\ln\frac{n+1}{n}\right)+\ln n}{\ln n}-1} =$$

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n}-1} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\overset{\to 1}{\ln\left(\overset{\to e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)}\right)}{\ln n}-1} = e^{\frac{\overset{=0}{\ln 1}}{+\infty}-1} = e^{-1}.$$

(б) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2+1}}\left(2!+\frac{(2+1)!}{1!}+\dots+\frac{(2+n)!}{n!}\right) \underset{\{n^{2+1}\}\nearrow+\infty}{\overset{\text{ШТ}}{=}} \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{2!}+\dots+\frac{(2+n)!}{n!}-\left(\cancel{2!}+\dots+\cancel{\frac{(2+n-1)!}{(n-1)!}}\right)}{n^{2+1}-(n-1)^{2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2+n)!}{n!}}{n^3-(n-1)^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{(n-(n-1))(n^2+n(n-1)+(n-1)^2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+2}{2n^2+\dots} = \frac{1}{2}.$$

□

5. Нека је $a>0$ и $b\in\mathbb{R}$. Нека је $f:[-a,a]\longrightarrow\mathbb{R}$ дата са

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{a^2+ax+x^2}-\sqrt[3]{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}, & 0<x\le a,\\ b, & x=0,\\ \dfrac{\sin 3x - x}{\arcsin x + x}, & -a\le x<0\end{cases}$$

Одредити a и b тако да f буде непрекидна на $[-a,a]$.

Решење: Критична тачка за непрекидност: $x=0$.
Мора да важи $f(0)=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}f(x)$, односно:

$$b=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt[3]{a^2+ax+x^2}-\sqrt[3]{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = \lim_{x\to 0-}\frac{\sin 3x - x}{\arcsin x + x}.$$

- $$b=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin 3x - x}{\arcsin x + x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0-}\frac{\overset{\to 1}{\frac{\sin 3x}{3x}}\cdot 3 - 1}{\underset{\to 1}{\frac{\arcsin x}{x}}+1} \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} \frac{3-1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1 \Longrightarrow \boxed{b=1}$$

- $$b=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt[3]{a^2+ax+x^2}-\sqrt[3]{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}\cdot\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{-\text{〃}-}\cdot\frac{\sqrt[3]{a^2+ax+x^2}^2+\sqrt[3]{a^2+ax+x^2}\cdot\sqrt[3]{a^2-ax+x^2}+\sqrt[3]{a^2-ax+x^2}^2}{-\text{〃}-}$$

рационалисано!

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\cancel{a^2}+ax+\cancel{x^2}-(\cancel{a^2}-ax+\cancel{x^2})}{\cancel{a}+x-(\cancel{a}-x)}\cdot\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt[3]{\dots}^2+\sqrt[3]{\dots}\cdot\sqrt[3]{\dots}+\sqrt[3]{\dots}^2} = a\cdot\frac{\sqrt{a+0}+\sqrt{a-0}}{\sqrt[3]{a^2}^2+\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^2}^2}$$

$$=a\cdot\frac{2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{a^4}} = \frac{2}{3}\sqrt[6]{a} \Longrightarrow \boxed{a=\left(\frac{3}{2}b\right)^6=\left(\frac{3}{2}\right)^6}.$$

□