Писмени испит из Увода у анализу, М смер

28.1.2021.

1. Дат је скуп $X = \{x \in \mathbb{R} \setminus [0, \frac{1}{3}] : \; 0 < \frac{1}{x} \cdot [x] \leq 1\}$. [15]

   (а) Одредити $\inf X, \sup X$. Да ли постоје $\min X, \max X$?

   (б) Одредити $\overline{X}, X^{\circ}, \partial X, X^{iz}, X'$.

   Напомена: $[x]$ је цео део броја x: ако је $k \leq x < k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, онда је $[x] = k$.

2. Доказати да је низ $\{2^{-n}\cos(n\pi)\}_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев. Да ли је тај низ Кошијев ако уместо $n\pi$ стоји $n\alpha$, за произвољно $\alpha \in (0, \pi)$? [7]

3. Одредити природни домен и асимптоте графика функције

$$f(x) = \frac{1}{4} ln \left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \frac{1}{2} x \cdot arctgx.$$

   (Помоћ: користити идентитет $arctgx + arctg\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, $x > 0$.) [18]

   Бонус бодови:

   (а) доказати претходни идентитет; [3]

   (б) скицирати график функције f. [2]

4. Израчунати следеће лимесе:

   (а) $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(ln(n+1) - lnn\Big)^{\frac{1}{lnn}}$; [5]

   (б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}(2! + \frac{(2+1)!}{1!} + \cdots + \frac{(2+n)!}{n!})$. [5]

5. Нека је $0 < a < 1$ и $b \in \mathbb{R}$. Функција $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ дата је са

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sin2x - x}{arcsinx + x}, & -a \leq x < 0, \\ b, & x = 0, \\ \frac{\sqrt[3]{a^2+ax+x^2} - \sqrt[3]{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}, & 0 < x \leq a. \end{cases}$$

   Одредити a и b тако да f буде непрекидна на $[-a, a]$. [10]

У угластим заградама дата је бодовна вредност сваког задатка.

Резултати: до суботе увече.

Увид у радове: понедељак у 15h, сала 14.

Датум усменог испита: биће објављен заједно са резултатима.

Срећно!!! ☺