

Писмени испит из Увода у анализу, М смер

7. 4. 2021.

1. Нека је $A = \{x \in \mathbb{R} : x + \frac{1}{|x|} \geq 2\}$ а $B = \{x \in \mathbb{R} : \sin(\frac{1}{x+1}) = 0 \wedge x < -1\}$. Ставимо $X = A \cup B$.

- (а) Одредити инфимум и супремум скупа X . Да ли постоје $\min X$, $\max X$?
(б) Одредити X° , \bar{X} , ∂X , X' , X^{iz} .

[14]

2. Познато је да је $2^n < n! < n^n$, $n \rightarrow \infty$. Да ли је и $\ln(2^n) < \ln(n!) < \ln(n^n)$, $n \rightarrow \infty$? Ако означимо

$$f_n = \ln(2^n), \quad g_n = \ln(n!), \quad h_n = \ln(n^n), \quad n \in \mathbb{N},$$

упоредити низове f_n , g_n и h_n помоћу симбола $<$ и \sim асимптотског понашања.
[8]

Помоћ: може се користити Стирлингова формула, $n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$, $n \rightarrow \infty$, као и основне особине логаритма.

3. (а) Израчунати $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x + \sqrt{x^2 - 2x}) \frac{\sin(2021x)}{(\cos x)^{2021} + 2021}$. [7]

- (б) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} (2\sqrt[n]{e} - 1)^n$. [5]

Додатни бодови: Доказати да је $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{e} - 1) = 1$. [7]

Помоћ: У задатку под (б) може се користити лимес из задатка за додатне бодове, а у задатку за додатне бодове може се користити теорема о укљештеним низовима.

4. Одредити природни домен и асимптоте графика функције $f(x) = \frac{x-2}{x+2} e^{-\frac{4}{x}}$. [12]

Додатни бодови: грубо скицирати график функције f . [3]

5. Дата је функција f дефинисана на интервалу $[0, \frac{\pi}{2}]$ и непознати параметри $a > 0, b \in \mathbb{R}$. Ако је

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(2x)\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x), & 0 \leq x < \frac{\pi}{4}, \\ b, & x = \frac{\pi}{4}, \\ \frac{1 - (\cos(x - \frac{\pi}{4}))^a}{(x - \frac{\pi}{4})^2}, & \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

наћи непознате константе a и b (ако је могуће) тако да f буде непрекидна на $[0, \frac{\pi}{2}]$. [14]

Помоћ: приликом рачунања користити смене у лимесу.

У угластим заградама дата је бодовна вредност сваког задатка.

Резултати: до петка увече.

Увид у радове: по договору, послати mail.

Датум усменог испита: биће објављен заједно са резултатима.

Срећно!!! 😊