1. $X = \{ x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1) : \frac{x^3+4x^2-x-4}{x^2+2x} \leq 0 \}$.

(а) $\inf X, \sup X, \min X, \max X = ?$

(б) $X^\circ, \overline{X}, X', \partial X, X^{iz} = ?$

Решење:

$$\begin{aligned} x^3+4x^2-x-4 &= x^2(x+4)-(x+4) \\ &= (x^2-1)(x+4) \\ &= (x-1)(x+1)(x+4) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{x^3+4x^2-x-4}{x^2+2x} = \frac{(x-1)(x+1)(x+4)}{x(x+2)} = f(x) \longleftarrow$$

Одређујемо знак овог израза уз помоћ таблице.

	$-\infty$ до -4	-4 до -2	-2 до -1	-1 до 0	0 до 1	1 до $+\infty$
$x+4$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

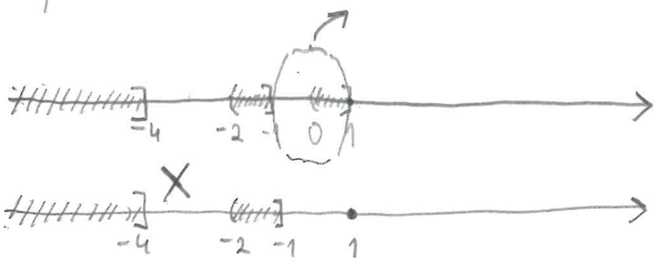
$$\Longrightarrow f(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x+4)}{x(x+2)} \leq 0 \iff$$

$$x \in (-\infty,-4] \cup (-2,-1] \cup (0,1]$$

мора $x \neq -2, 0$ да не би било дељења са 0

Значи, $X = \big((-\infty,-4] \cup (-2,-1] \cup (0,1]\big) \setminus (-1,1)$

$$= (-\infty,-4] \cup (-2,-1] \cup \{1\}$$



(а) $\inf X = -\infty \Rightarrow \min X =$ не постоји

$\sup X = 1 \in X \Rightarrow \max X = 1$.

(б) $X^\circ = (-\infty,-4) \cup (-2,-1)$,

$\overline{X} = (-\infty,-4] \cup [-2,-1] \cup \{1\}$

$X' = (-\infty,-4] \cup [-2,-1]$

$X^{iz} = X \setminus X' = \{1\}$

$\partial X = \{-4,-2,-1,1\}$.

$\square$

② $a_1 < 0,\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n^2+a_n^4},\quad n\in\mathbb{N}.$

Решење: $a_1 < 0 \implies$ биће и $a_n<0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ (ово се види из начина на који је низ задат).

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1+\underbrace{a_n^2+a_n^4}_{>0}} < \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \qquad /\cdot a_n<0$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+1} > a_n \implies \text{низ је строго растући} \\ \forall n\ a_n<0 \implies \text{низ је огр. одозго} \end{array}\right\} \overset{T\uparrow}{\Longrightarrow} \{a_n\} \text{ је конв.}$$

Означимо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$. Онда је и $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = l$.

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n^2+a_n^4} \qquad / \lim_{n\to\infty}$$

$$l = \frac{l}{1+l^2+l^4} \qquad /\cdot(1+l^2+l^4)$$

$$l(1+l^2+l^4) = l$$
$$\cancel{l}+l^3+l^5 = \cancel{l}$$
$$l^3(1+l^2)=0 \implies l^3=0 \ \vee\ \cancel{1+l^2=0}$$
$$\Downarrow$$
$$l=0$$

③ (a) $(n-1)\cdot\frac{1}{n^{n^2}} \le \frac{1}{2^{n^2}}+\frac{1}{3^{n^2}}+\dots+\frac{1}{n^{n^2}} \le (n-1)\cdot\frac{1}{2^{n^2}} \qquad /\sqrt[n]{\ }$

$$\frac{\sqrt[n]{n-1}}{n^n} \le \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n^2}}+\frac{1}{3^{n^2}}+\dots+\frac{1}{n^{n^2}}} \le \frac{\sqrt[n]{n-1}}{2^n}$$

$$0$$

ТОУН

$$(\delta) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1+1\cdot a+2\cdot a^2+\cdots+n\cdot a^n}{n\cdot a^{n+1}} \overset{\text{ШТ}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(\cancel{1}+\cancel{1\cdot a}+\cancel{2\cdot a^2}+\cdots+n\cdot a^n)-(\cancel{1}+\cancel{1\cdot a}+\cdots+\cancel{(n-1)a^{n-1}})}{n\cdot a^{n+1}-(n-1)a^n}$$

$$\{n\cdot a^{n+1}\}\nearrow +\infty$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot a^n}{n\cdot a^{n+1}-(n-1)a^n}\cdot\frac{\frac{1}{na^n}}{\frac{1}{na^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{a-1}.$$

$\square$