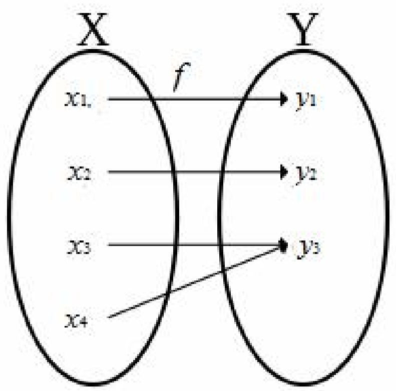
Sadržaj:

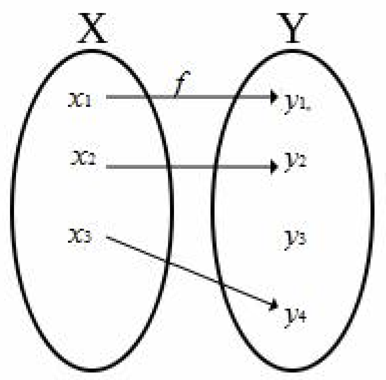
1. Uvod

***Definicija 1:** Funkcija je jedan od osnovnih pojmova matematike. Funkcija je, uopšte, pravilo pridruživanja jednog elementa iz skupa X (domen funkcije) drugom iz skupa Y (kodomen funkcije).
Za zapisivanje funkcija koristimo oznake kao što je $f: X \rightarrow Y$, ili $y = f(x)$.

*****Osobine funkcija:

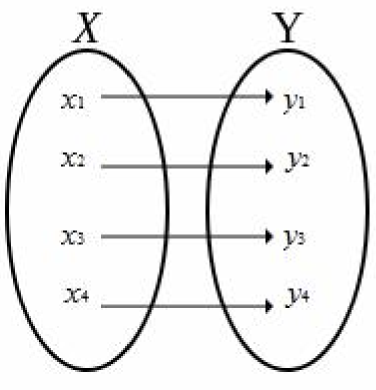
***Definicija 2:**
Funkcija $f: X \rightarrow Y$ zove se surjekcija, ili "na" preslikavanje, ako je $(\forall x \in X)\ (\exists y \in Y)\ f(x)=y$





***Definicija 3:**
Funkcija $f: X \rightarrow Y$ zove se injekcija, ili 1-1 preslikavanje, ako važi:
$(\forall x_1, x_2 \in X)\ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 = x_2))$

Definicija 4:
Funkcija koja je i surjekcija i injekcija zove se bijekcija.
Bijekciju nazivamo i obostrano jednoznačno preslikavanje.



***Definicija 5:** Neka su A i B proizvoljni skupovi. Ako postoji bar jedno bijektivno preslikavanje f : A → B, kažemo da skupovi A i B imaju istu kardinalnost, to označavamo A ~ B. Još se kaže i da skupovi A i B imaju istu moć, da su ekvivalentni ili ekvipotentni.

Gore pomenuta relacija „ ~ “ je relacija ekvivalencije i pomoću nje se skup svih mogućih skupova razlaže na klase ekvivalencije. Relacija je relacija ekvivalencije kada je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

***Defnicija 6:** Klasa ekvivalencije kojoj pripada skup A naziva se kardinalni broj skupa A i označava sa k (A).

Koristi se još i oznaka |A|.

Dakle, pod kardinalnim brojem skupa A podrazumevamo kolekciju svih skupova ekvivalentnih sa A.

Iz navedenog je sasvim jasno da je k (A) = k (B) ako i samo ako se radi o međsobno ekvivalentnim skupovima.

***Definicija 7:** Konačni skupovi A i B su ekvivalenti akko imaju isti broj elemenata.

***Definicija 8:** Skup A je konačan ako postoji n∈**N** tako da su skupovi A i

{1, 2, 3, …, n}ekvivalentni.

Kardinalni broj konačnog skupa je jednak broju elemenata skupa {1, 2, 3, …, n} na koji se može bijektivno preslikati. Kardinalni broj praznog skupa se identifikuje sa nulom.

*** Definicija 9:** Za skup kažemo da je beskonačan ako nije konačan.

Kardinalni broj beskonačnog skupa nazivamo transfinitnim kardinalnim brojem.

Definicija 10:** Skup je prebrojiv ako postoji bijekcija između njega i skupa ***N.

*card**N*** = x_0, tj. Alef nula

****Teorema:**

1. Beskonačan podskup prebrojivog skupa je prebrojiv skup.
2. Ako je A prebrojiv i $A \subseteq B$, tada je A najviše prebrojiv.
3. Ako je B bilo koji beskonačan skup, postoji njegov podskup A koji je prebrojiv.

Kao posledicu ovog tvrđenja dobijamo da je $card\boldsymbol{N}$ najmanji transfinitni kardinalni broj.

****Teorema:** Unija najviše prebrojivo mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.

****Kantorova teorema:** Skup realnih brojeva iz intervala [0,1] nije prebrojiv, tj.

$$Card\boldsymbol{N} < card\,[0,1]$$

***Definicija 11:** Ako je $f : A \rightarrow B$ i X neprazan podskup skupa A, onda definišemo novo preslikavanje $f|_X : X \rightarrow B$ na sledeći način:

Za neko x iz X $f|_X(x) = f(x)$.

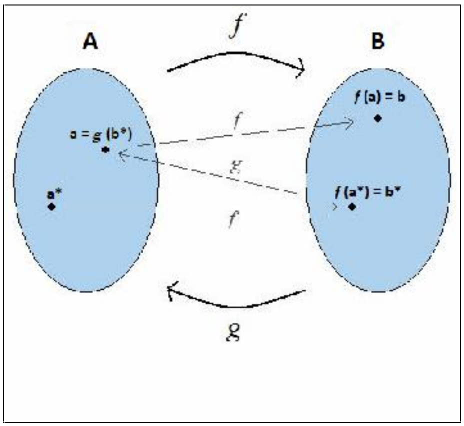
Preslikavanje $f|_X$ nazivamo restrikcijom funcije f na skup X.

2. Teorema Kantor - Šreder - Bernštajn

<u>Teorema Kantor - Šreder - Bernštajn</u> : Neka su A i B skupovi. Ako je A ekvipotentan nekom podskupu skupa B i B evipotentan nekom podskupu skupa A, onda sledi da je A ekvipotentno B.

<u>Dokaz</u>:

Pretpostavimo da su A i B disjunktni skupovi, odnosno da je $A \cap B = \emptyset$.
Neka su f i g 1-1 funkcije, definisane na sledeći način: $f : A \to B$ i $g : B \to A$.
Naš zadatak je da dokažemo da postoji bijekcija skupa A u skup B.



Kada bi bilo $B = f\,[A]$ ili $A = g\,[B]$ teorema bi trivijalno važila.
Međutim, ukoliko je $f\,[A] \subset B$, što znači da $\exists b \in B$ takvo da $b \neq f(a)\ \forall a \in A$ (analogno, $g\,[B] \subset A$ što znači da $\exists a \in A$ takvo da $a \neq g(b)\ \forall b \in B$) dokaz pokazujemona sledeći način:

Kažemo da je elemenat $a \in A$ „roditelj“ elementa $f(a) \in B$, a $f(a)$ „potomak“ elementa a. Takođe, elemenat $b \in B$ je „roditelj“ elementa $g(b) \in A$, a elemenat $g(b)$ „potomak“ elementa b.

Neka je a proizvoljan elemenat skupa A.
Njemu pridružujemo niz

$$a,\ f(a), g(f(a)),\ f(g(f(a))), \ldots$$

gde svi članovi niza predstavljaju potomke elementa a, izuzev njega samog.

Na primer kada bi uzeli član ‘$g\,(f\,(a)) \in A$’ datog niza, svi članovi niza koji slede nakon nekog određenog člana su njegovi potomci.

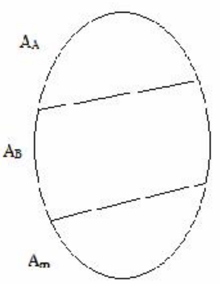
Na ovaj način svaki elemenat skupa A ima beskonačno mnogo potomaka.
U svakom takvom nizu, za svaki elemenat skupa A, članovi niza koji mu prethode su njegovi preci.

U prethodnom primeru, preci elementa $g\,(f\,(a)) \in A$ su $a \in A$ i $f\,(a) \in B$.

Svaki elemenat je sebi predak.

Neka je sada $a \in A$. Tokom nalaženja svih mogućih „predaka“ elementa a, mora se desiti neka od sledeće tri stvari:

- Lista „predaka“ je konačna i poslednji „predak“ je elemenat iz A, koji nema svog „pretka“. Možemo reći da elementi ovog skupa potiču iz A. (A_A)
- Lista „predaka“ je konačna i poslednji „predak“ je elemenat iz B, koji nema svog „pretka“. Možemo reći da elementi ovog skupa potiču iz B. (A_B)
- Lista „predaka“ je beskonačna. (A_∞)



*Primetimo da iz $A = A_\infty$ sledi da je $g : B \to A$ bijekcija.

Na osnovu ova 3 slučaja formiraju se tri disjunktna podskupa skupa A :

1_A - Dokažimo da važi

$$A_A = (\{a \in A \setminus g\ [B]\} \cup \underbrace{\{\text{svi naslednici elemenata skupa } A \setminus g\ [B] \text{ koji su u } A\}}_{S_1})$$

Dokaz:

(=>)

1. Neka $a \in A_A$. Ako se lista predaka sastoji samo od elementa a (jednog elementa), on je sam sebi predak, pa mora da se nalazi u skupu A\ g (B), jer za svako $b \in$ B važi da je $g\ (b) \neq a$.

2. Neka $a \in A_A$ i neka je njegova lista predaka konačna i poslednji predak je iz A\{a}. Neka je to elemenat $a_p \in$ A. Treba dokazati da je $a \in$ A naslednik elementa a_p koji je u A\ g [B] (što znamo na osnovu 1. slučaja). Jasno je da je taj elemenat a naslednik elementa a_p, jer mu je a_p predak .Takođe je jasno da $a_p \in$ A\ g (B) jer inače ne bi bio poslednji predak, a samim tim što je a naslednik elementa a_p i nalazi se u A sledi da se nalazi u A_A.

(<=)

1. Ukoliko elemenat a pripada skupu A\ g (B), to znači da je on sam sebi predak i samim tim da se nalazi u skupu A_A.

2. Ukoliko $a \in S_1$, (to znači da je on naslednik nekog elementa iz skupa A\ g [B] i nalazi se u A) sledi da se on nalazi baš u A_A, jer potiče iz A\ g [B] $\subset$ A.

2_A - Neka je A_B skup svih elemenata koji potiču iz B, tj neka je A_B skup svih „potomaka“ u A elemenata iz $B \setminus f(A)$.

Dokažimo $$A_B = \underbrace{\{ \text{svi potomci u A elementa iz } B \setminus f(A)\}}_{S_2}$$

Dokaz:

(=>)

$a \in A_B$ znači da postoji elemenat $b \in B$, koji je poslednji predak elementa a. Jasno da je elemenat a onda potomak elementa b. Treba da pokažemo da se elemenat b nalazi u skupu $B \setminus f(A)$, što je jasno iz činjenice da je on poslednji predak: kada ne bi bilo tako, postojao bi elemenat $\tilde{a}$ iz A takav da je $b = f(\tilde{a})$, ali onda b ne bi bio poslednji predak elementa a.

(<=)

Neka $a \in S_2$, što znači da je on potomak nekog elementa b iz $B \setminus f(A)$, odnosno elementa koji potiče iz B.

Skup A zapravo unija prethodno navedena disjunktna 3 skupa, tj.

$$A = A_A \cup A_B \cup A_\infty$$

Na sličan način definišemo particiju skupa B.

Neka je sada $b \in$ B. Tokom nalaženja svih mogućih „predaka“ elementa b, mora se desiti neka od sledeće tri stvari:

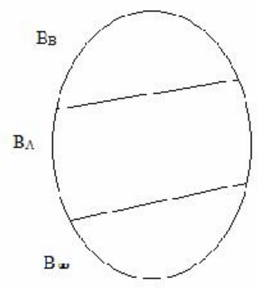
- Lista „predaka“ je konačna i poslednji „predak“ je elemenat iz B, koji nema svog „pretka“. Možemo reći da elementi ovog skupa potiču iz B. (B_B)
- Lista „predaka“ je konačna i poslednji „predak“ je elemenat iz A, koji nema svog „pretka“. Možemo reći da elementi ovog skupa potiču iz A. (B_A)
- Lista „predaka“ je beskonačna. (B_∞)

Tada dobijamo disjunktnu uniju $\quad B = B_B \cup B_A \cup B_\infty.$

Kao i u slučaju skupa A, može se dokazati:

1_B - $B_B = (\{ b \in B \setminus f(A)\} \cup$ {svi elementi naslednici elemenata skupa $B \setminus f(A)$ koji su u B })

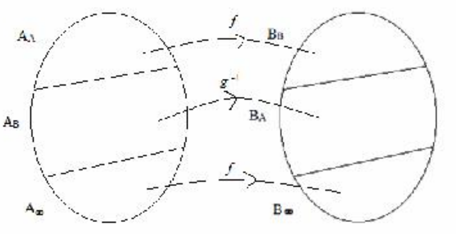
2_B - B_A = {svi potomci u B elemenata iz $A \setminus g[B]$}



Sada ćemo uspostaviti vezu između podskupova skupa A sa podskupovima skupa B. To ćemo uraditi koristeći restrikcije funkcije f na A_A i A_∞ i fuknkcije g^{-1} na A_B.

1-1 osobina funkcije f se prenosi i na njene restrikcije, stoga je potrebno dokazati da su one i "na" funkcije iz čega dalje sledi da su bijekcije. Slično i za funkciju g^{-1} .

Jasno da restrikcija funkcije f na skup A_A slika skup A_A u B_A. (sledi iz 1_A i 2_B)



Treba da pokažemo da je restrikcija funkcije f "na" funkcija.
U tom slučaju, sledi da su skupovi A_A i B_A iste kardinalnosti, odnosno $|A_A|=|B_A|$.

Neka $b \in B_A$. Iz 2_B sledi da je b potomak elementa iz $A \setminus g\,[B]$. Neka je taj element označen sa $a \in A\setminus g\,[B]$. Iz 1_A sledi $a \in A_A$. Dakle, $f\,|_{A_A}$ je "na".

Neka je sada g^{-1} inverzna funkcija sirjekcije $g : B \to g\ (B)$. Funkcije g^{-1} je bijekcija između g [B] i B. Restrikcija funkcije g^{-1} na skup A_B, slika elemente skupa A_B u skup B_B. (što sledi iz 2_A i 1_B jer je $B \setminus f\,[A] \subset B$.) Treba da dokažemo da je ona bijekcija. Znamo da je 1-1 jer je funkcija g 1-1, a osobine se prenose na inverzne funkcije. Ostaje da dokažemo da je "na" funkcija odakle sledi $|A_B|=|B_B|$.

Neka $b \in B_B$. Tada $\exists a \in g\,[B]$ takav da je $g^{-1}(a) = b$. Dakle, $g\,(b) = a$, pa iz 2_A sledi da $a \in A_B$.

Konačno, restrikcija funkcije f na skup A_∞ je bijekcija A_∞ na skup B_∞.

Neka $b \in B_\infty$, $\exists a \in A$ takvo da $f\,(a) = b$. Tada $a \in A_\infty$, jer bi inače a imao konačno mnogo predaka, na primer N_0, a onda $b = f\,(a)$ ima tačno $N_0 +1$ predaka, to jest b ne bi pripadalo B_∞, što je kontradikcija.

Naš zadatak je bio da odredimo bijekciju skupa A na skup B, odnosno prethodna tri slučaja objedinimo u jedan, što činimo definisanjem nove fuknkije *h*.

Funkciju $h : A \rightarrow B$ definišemo na sledeći način:

$$h\ (a) = \begin{cases} f\,(a) \text{ ako } a \in A_A \\ g^{-1}(a) \text{ ako je } a \in A_B \\ f\ (a) \text{ ako je } a \in A_\infty \end{cases}$$

Tada je *h* bijekcija skupa A na skup B. Što prema teoremi znači da su A i B ekvipotentni.
□

3. Ostale teoreme i definicije o kardinalnosti

Definicija 1**: Kardinalni broj skupa ***N označavamo kao $\aleph_0$, a kardinalni broj skupa ***R*** je označen sa c.

$$\boxed{\text{þ}_0 < c}$$

***Definicija 2**: Neka su m i n kardinalni brojevi. Tada je m ≤ n ako postoje skupovi A i B takvi da je *card*A = m i *card*B = n i A je ekvipotentan nekom poskupu skupa B.

- (za n < m mora da važi m ≤ n i m ≠ n)

****Teorema:** Za bilo koji skup A važi da je *card*A < *card* P(A).

****Teorema:** Ako su m i n kardinalni brojevi i ako važi m ≤ n i n ≤ m, tada je m = n.

Posledica teoreme: Ne postoji najveći kardinalni broj.

***Definija 3:** Ako je skup A kardinalnosti $\aleph$, onda je kardinalnost P(A) označena sa $2^{\aleph}$.

Lema: Neka su a i b relani brojevi, takvi da je a < b. Tada

- [0,1] ~ [a,b];
- (0,1) ~ (a,b);
- (0,1) ~ (1,∞);
- (-∞,-1) ~ (-2,-1);
- (1,∞) ~ (1,2);
- R ~ (-2,2);
- R ~ (a,b).

Tvrđenje: Neka su a i b relani brojevi takvi da a < b. Ako je A bilo kakav podskup skupa ***R*** takav da (a,b) ⊆ A, onda je *card*A = *c*, posebno, *card* (a,b) = *card* [a,b] = *c*.

4. Zanimljivosti

Istorija Kantor-Bernštajn-Šreder teoreme

Kao što to često biva u matematici, ime ove teoreme ne predstavlja njenu stvarnu istoriju. Naime, tradicionalno ime „Kantor-Bernštajnova teorema“ je zasnovano na dva dokaza, koja su objavljena pojedinačno, 1898. godine. Kantorovo ime se dodaje jer je on prvi koji je postavio ovu teoremu 1895. godine, Šrederovo ime se često izostavlja jer se ispostavilo da je njegov dokaz pogrešan, dok se ime matematičara, Ričarda Dedekinda, koji je prvi dokazao ovu teoremu uopšte ne pominje. Smatra se da je Kantor želeo da teorema nosi ime „Teorema ekvivalencije“.

1887. - Kantor je objavio teoremu, ali bez dokaza.
1887. - Ričard Dedekind je dokazao teoremu, ali nije to objavio.
1896. - Šreder objavljuje dokaz.
1897. - Bernštajn, tada student, objavljuje njegovu varijantu dokaza.
1897. - Nakon posete Bernštajnu, Dedekin nezavisno objavljuje dokaz po drugi put
1898. - Bernštajnov dokaz je Emili Borel navela u svojoj knjizi o funkcijama.

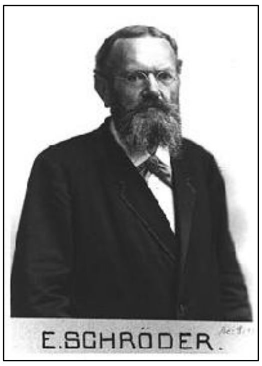
Georg Kantor

Georg Kantor (nem. Georg Cantor, Petrovgrad, Rusija, 3. marta 1845— Hale, Nemačka, 6. januara 1918), nemački matematičar, utemeljivač teorije skupova.
Prvi je numeričke sisteme, poput racionalnih i stvarnih brojeva, istraživao sistematično, kao zaokružene entitete ili skupove. To pregnuće dovelo ga je do iznenaćujućeg otkrića da nisu svi beskrajni skupovi iste veličine. Dokaz za ovo je Kantorov dijagonalni postupak
Pokazao je da racionalnih brojeva ima isto koliko i prirodnih brojeva, to jest da ova dva skupa imaju istu kardinalnost (dokaz da racionalnih brojeva ima prebrojivo mnogo je Kantorovo prebrojavanje skupa Q). Dokazao je, takođe, da takve podudarnosti nema kod znatno većeg skupa iracionalnih brojeva, te su otuda oni poznati kao skup koji se ne može prebrojati.

Feliks Bernštajn

Feliks Bernštajn (Felix Bernstein, 24. februar 1878, Hale, Nemačka - 3. decembar 1956, Zirih, Švicarska), nemački Jevrej matematičar poznat po razvoju teorem o jednakosti skupova u 1897. Bavio se naukom pod uticajem Kantora.
Godine 1934, nakon Hitlerovog uspona na vlast, Bernštaj je emigrirao u SAD-u. Nakon rata, vratio se u Evropu, a umro je od raka u Zirihu, 3. decembra 1956.

Ernest Šreder



Ernest Šreder (Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder, 25. novembar 1841 u Badenu, Nemačka - 16. juna 1902 u Karlsruheu u Nemačkoj) je nemački matematičar, uglavnom poznat po svom radu na algebarskoj logici. On je glavni u istoriji matematičke logike (disciplini čije je nativ možda čak i on sam izmislio) ,na temelju sumiranja i proširenja rada Džordža Bole,, Augustusa Morgana, a posebno Čarlsa Pirsa. On je najpoznatiji po svojoj monumentalnoj „Vorlesungen über die Algebra der Logik“ (predavanja iz algebarske logike), koja je pripremila put za nastanak matematičke logike kao zasebne discipline u dvadesetom veku.

5. Literatura

- Sidney A. Morris, Topology without tears, 2007.
- Ljiljana Gajić, Predavanja iz Uvoda u Analizu, Novi Sad, 2004.
- Gradimir Vojvodić, Predavanja iz matematičke logike, Novi Sad, 2007.

Internet:

- http://www.math.toronto.edu/lgoldmak/CanBer.pdf
- http://www.whitman.edu/mathematics/higher_math_online/section04.09.html
- https://www.wikipedia.org/