$0 < 1$

Pretpostavlja se da čitalac poznaje aksiome (pojam) totalno uređenog polja.

Teorema 0.1. *U svakom totalno uređenom polju neutralni element za sabiranje je strogo manji od neutralnog elementa za množenje, to jest*

$$0 < 1.$$

Dokaz. Neka je $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ totalno uređeno polje. Jasno je da je $1 \neq 0$ jer se jedinica bira u $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, pa je dovoljno da se pokaže da je $0 \leq 1$.

Dokazaćemo opštije tvrđenje: Za svako $x \in \mathbb{Q}$ važi $0 \leq x \cdot x$. Posledično, za $x = 1$ dobija se traženi rezultat: $0 \leq 1 \cdot 1 = 1$.

U slučaju $0 \leq x$, iz aksiome koja povezuje relaciju poretka i operaciju množenja sledi $0 \leq x \cdot x$, pa preostaje da se dokaže sledeće tvrđenje:

$$(\forall x \in \mathbb{Q})(x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \cdot x). \tag{1}$$

Najpre se može uočiti:

$$x \leq 0 \Leftrightarrow x + (-x) \leq 0 + (-x) \Leftrightarrow 0 \leq (-x)$$

odakle sledi $0 \leq (-x) \cdot (-x)$, pa, ako se dokaže da je $(-x) \cdot (-x) = x \cdot x$, dobiće se $0 \leq x \cdot x$, odnosno (1) i time će teorema biti u potpunosti dokazana.

U tu svrhu se koriste sledeće činjenice:

i) $(\forall x \in \mathbb{Q})(x \cdot 0 = 0)$:

$$x + x \cdot 0 = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x(1 + 0) = x \cdot 1 = x,$$

pa *i)* sledi jer je neutralni element za sabiranje jedinstven.[1]

ii) $(\forall x \in \mathbb{Q})(-x = (-1) \cdot x)$: koristeći jedinstvenost suprotnog elementa i *i)* dobija se

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = x \cdot (1 + (-1)) = x \cdot 0 = 0 \Rightarrow \; (-1) \cdot x = -x.$$

iii) $(\forall x \in \mathbb{Q})(x = -(-x))$: koristeći *i)* i *ii)* dobija se

$$-x + (-(-x)) = -x + (-1)(-x) = -x \cdot (1 + (-1)) = -x \cdot 0 = 0 \Rightarrow \; (-(-x)) = x,$$

jer je suprotni element jedinstveno određen.

iv) $(-1) \cdot (-1) = 1$:

$$x \cdot ((-1) \cdot (-1)) = ((-1) \cdot x) \cdot (-1) = -x \cdot (-1) = -(-x) = x \Rightarrow \; (-1) \cdot (-1) = 1,$$

jer je neutralni element jedinstveno određen.

Konačno:

$$x \cdot x = (-(-x)) \cdot (-(-x)) = (-1)(-x) \cdot (-1)(-x) = ((-1) \cdot (-1))((-x) \cdot (-x)) = (-x) \cdot (-x).$$

Zaključak: za sve $x \in \mathbb{Q}$ važi $0 \leq x \cdot x$, pa je $0 \leq 1$. Odavde, uz $1 \neq 0$, sledi $0 < 1$. $\square$

[1] Jedinstvenost se sasvim lako dokazuje: za neutralne elemente 0_1 i 0_2 važi: $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$, a to je jedinstvenost.