Koši- Švarcova nejednakost u $\mathbb{R}^n$

Za proizvoljne nenegativne realne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ važi nejednakost geometrijske i aritmetičke sredine:

$$(a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Ova nejednakost se može dokazati primenom (regresivne) matematičke indukcije.

Teorema 0.1. *Neka su $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vektori u $\mathbb{R}^n$. Tada važi Koši - Švarcova nejednakost:*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

gde je $\|x\| = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{1/2}$ i $\|y\| = (|y_1|^2 + |y_2|^2 + \cdots + |y_n|^2)^{1/2}$.

Dokaz. S obzirom da je $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot |y_k|$, dovoljno je dokazati da Koši - Švarcova nejednakost važi za nenegativne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Ako je $x = 0$ ili $y = 0$ onda nejednakost trivijalno važi, pa u nastavku posmatramo $\|x\| > 0$ i $\|y\| > 0$.

Odnos geometrijske i aritmetičke sredine implicira:

$$\frac{x_k}{\|x\|} \frac{y_k}{\|y\|} = \left(\frac{x_k^2}{\|x\|^2} \frac{y_k^2}{\|y\|^2} \right)^{1/2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x_k^2}{\|x\|^2} + \frac{y_k^2}{\|y\|^2} \right), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Sumiranjem po k dobija se:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\|x\|} \frac{y_k}{\|y\|} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k^2}{\|x\|^2} + \frac{y_k^2}{\|y\|^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{\|x\|^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{\|y\|^2} \right).$$

Kako je

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{\|x\|^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{\|x\|^2} = 1, \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{\|y\|^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}{\|y\|^2} = 1,$$

dobija se

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\|x\|} \frac{y_k}{\|y\|} \leq 1 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

čime je tvrđenje dokazano. □