Parcijalne diferencijalne jednačine - pismeni ispit
30. januar 2019.

1. Data je jednačina $u_{xx} + yu_{yy} - u_y = 0$. Odrediti oblasti u kojima je jednačina eliptična, hiperbolična i parabolična. Za $y < 0$ svesti jednačinu na kanonički oblik i naći rešenje koje je takvo da postoji $\lim_{y \to 0-} u_y(x, y)$ i da je $u(x, 0) = a(x)$ za funkciju $a \in C^2(\mathbb{R})$,

2. Rešiti mešoviti problem

$$u_{tt} - u_{xx} = Axe^{-t}, \quad x \in (0, l),\ t > 0,$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0,\ u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l].$$

3. Data je jednačina $u_t = (k(x)u_x)_x$, $u(0, t) = u(l, t) = 0$ za $x \in [0, l]$, $t \geq 0$. Neka je $k \in C^1(0, l)$ pozitivna funkcija. Definišimo

$$E(t) = -\frac{1}{2}\int_0^l (u(x, t)^2 + k(x)u_x(x, t)^2)dx.$$

   (a) Pokazati da je E nerastuća funkcija.
   (b) Pokazati da je rešenje datog problema jedinstveno uz početni uslov $u(x, 0) = \phi(x)$.

4. Odrediti za koje $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcija $u(x) = |x|(\sin|x|)^\alpha$ pripada prostoru $H^1(-1, 1)$.

5. Posmatrajmo jednačinu $u_t = u_{xxx}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

   (a) Rešiti datu jednačinu sa početnim uslovom $u(x, 0) = f(x)$, gde je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
   (b) Pokazati da je $\int_{-\infty}^{\infty} u^2(x, t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx$.

Svaki zadatak vredi 12 poena.

Parcijalne diferencijalne jednačine - pismeni ispit

5. april 2019.

1. Odrediti oblasti u kojima je jednačina $xu_{xx} + yu_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$ hiperboličnog, eliptičnog i paraboličkog tipa. Svesti jednačinu na kanonički oblik u drugom kvadrantu.

2. Data je jednačina $u_t = Du_{xx} - \alpha u$, $\alpha > 0, D > 0$, $x \in [0,1]$, $t > 0$ sa rubnim uslovima $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $t > 0$.
   (a) Naći ekvilibrijumska rešenja, odnosno rešenja jednačine $Du_{xx} - \alpha u = 0$, $u(0) = u(1) = 0$, $u = u(x)$.
   (b) Rešiti polaznu jednačinu ako je početni uslov $u(x,0) = x$.
   (c) Ako je u_a rešenje jednačine iz (a) pokazati da je $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = u_a(x)$.

3. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ otvoren i ograničen skup. Posmatrajmo jednačinu $u + u_x^2 + u_y^2 = 1$ u Ω i $u = 0$ na $\partial\Omega$. Dokazati da je $0 \leq u \leq 1$.

4. Data je funkcija $u(x,y) = ln\Big(ln\Big(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)\Big)$ za $(x,y) \neq (0,0)$ i $u(x,y) = 0$ za $x = y = 0$. Neka je $B(0,1)$ otvorena lopta sa centrom u 0 i poluprečnikom 1. Da li $u \in L^\infty(B(0,1))$? Dokazati da $u \in H^1(B(0,1))$.

5. Rešiti jednačinu $-u_{xxxx} = u_t$, $u(x,0) = \phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Funkcija ϕ je data sa $\phi(x) = 1 - x^2$ za $-1 < x < 1$ i $\phi(x) = 0$ inače.

Svaki zadatak vredi 12 poena.

Parcijalne diferencijalne jednačine - pismeni ispit

11. jun 2019.

1. Odrediti funkcije f i g tako da funkcija $u(x,y) = f(x)g(y)$ bude rešenje jednačine
$$(1-x)u_x - y^2u_{yy} - yu_y + 2u = 0.$$
Odrediti rešenje koje zadovoljava uslove $f(0) = 1, f'(0) = -1, g(1) = 0, g'(1) = 2$.

2. Rešiti mešoviti problem
$$u_t - u_{xx} = 2xt - 2x, \quad x \in (0,1),\ t > 0,$$
$$u(0,t) = 2t,\ u(1,t) = t^2 + 1, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = \frac{x^2+x}{2}, \quad x \in [0,1].$$
Da li je dobijeno rešenje ograničeno?

3. Naći rešenje talasne jednačine
$$u_{tt} - c^2u_{xx} = 0,\ x > 0,\ t > 0,$$
$$u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = h(x),$$
$$u_t(0,t) = au_x(0,t), a \neq -c,$$
gde je $c > 0$ i h i g su C^2 funkcije. Pokazati da u opštem slučaju rešenje ne postoji ako je $a = -c$.

4. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ otvoren, ograničen skup i neka su $a > 0, b, c \in \mathbb{R}$ date konstante. Dokazati da rešenje $u \in C^2(\overline{\Omega})$ jednačine
$$\Delta u - au + bu_x + cu_y = 0$$
ne može da dostigne pozitivan maksimum ili negativan minimum u unutrašnjosti od Ω.

5. Rešiti jednačinu $u_{tt} - \Delta u + m^2u = 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0$ sa uslovima $u(x,0) = g(x), u_t(x,0) = h(x)$, gde je $m > 0$ i $g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Svaki zadatak vredi 12 poena.

Parcijalne diferencijalne jednačine - pismeni ispit

6. septembar 2019.

1. Rešiti jednačinu $(y+u)u_x + yu_y = x - y$, $u(x,1) = x+1$. Da li je rešenje definisano na $\mathbb{R}^2$?

2. Data je jednačina $u_{tt} + 2u_{xt} - 2u_t = 0$, $u = u(x,t)$ sa početnim uslovima $u(x,0) = u_t(x,0) = e^x$. Klasifikovati datu jednačinu i napisati je u kanoničkom obliku. Rešiti jednačinu.

3. Naći rešenje jednačine
$$u_{tt} - u_{xx} = e^{-t}\sin(\pi x),\ x \in [0,1],\ t > 0,$$
$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0.$$
Odrediti $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

4. Data je jednačina $u_t - u_{xx} = 0$, $x \in [0,l], t > 0$. Neka je u_1 rešenje jednačine koje zadovoljava uslove $u_1(0,t) = f_1(t)$, $u_1(l,t) = h_1(t)$, $t > 0$ i $u_1(x,0) = g_1(x)$. Neka je u_2 rešenje jednačine koje zadovoljava uslove $u_2(0,t) = f_2(t)$, $u_2(l,t) = h_2(t)$, $t > 0$ i $u_2(x,0) = g_2(x)$. Ako je $f_1 \le f_2$, $h_1 \le h_2$ i $g_1 \le g_2$ za sve $t > 0$ i $x \in [0,l]$, dokazati da je $u_1 \le u_2$ za sve $t > 0$ i $x \in [0,l]$.

5. Data je jednačina $au_x + u_y = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Znamo da su C^1 rešenja u obliku $u(x,y) = f(x-ay)$ za $f \in C^1(\mathbb{R})$. Pretpostavimo da $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Pokazati da tada $u = f(x-ay)$ zadovoljava jednačinu u prostoru $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Svaki zadatak vredi 12 poena.