Verovatnoća – pismeni ispit (svi smerovi)
3. septembar 2018.

1. Neka je $X : \mathcal{N}(7, 4)$ slučajna promenljiva koja predstavlja radni vek skupog uređaja, koji je osiguran. Ako se uređaj pokvari tokom prve dve godine isplaćuje se x dinara osiguranja, ako se pokvari tokom treće i četvrtke isplaćuje se $\frac{1}{2}x$ dinara. Ako se uređaj pokvari nakon četvrte godine osiguranje se ne isplaćuje. Kolika treba da bude vrednost x pa da očekivana vrednost isplate po osiguranju bude 5000 dinara?

Rešenje. Neka je Y - isplata po osiguranju. Tada je $E(Y) = xP(X \leq 2) + \frac{1}{2}xP(2 < X \leq 4)$, odnosno

$$E(Y) = xP\Big(\frac{X-7}{2} \leq \frac{2-7}{2}\Big) + \frac{1}{2}xP\Big(\frac{2-7}{2} \leq \frac{X-7}{2} \leq \frac{4-7}{2}\Big) = ... = x * 0.0365.$$

Dakle, $5000 = x * 0.0365$, odakle sledi $x = 136986.301$

2. Radni vekovi X i Y dve komponente u uređaju imaju zajedničku funkciju gustine $\varphi(x, y) = 2y + 2 - x$ za $0 < x < 2, 0 < y < 1$ i $\varphi(x, y) = 0$ inače. Odrediti raspodelu slučajne promenljive T koja predstavlja vreme do kog više nijedna komponenta neće raditi.

Rešenje. Treba odrediti raspodelu za $T = \max(X, Y)$. Važi da je $P(T \leq t) = P(X \leq t, Y \leq t)$. Za $0 \leq t \leq 1$ sledi

$$P(X \leq t, Y \leq t) = \int_0^t dx \int_0^t (2y + 2 - x)dy.$$

Za $1 \leq t \leq 2$ sledi

$$P(X \leq t, Y \leq t) = \int_0^t dx \int_0^1 (2y + 2 - x)dy.$$

3. Neka su Y i Z nezavisne slučajne promenljive koje uzimaju vrednosti -1 i 1 sa verovatnoćama $1/2$. Neka je $X = YZ$. Dokazati da je X nezavisna od Y i Z, ali da nije nezavisna od $Y + Z$.

Rešenje. $P(X = x, Y = y) = P(X = x|Y = y)P(Y = y)$ i $P(X = x|Y = y) = P(Z = x/y|Y = y) = P(Z = x/y) = 0.5$ (koristili smo nezavisnost Y i Z i jasno je da $x, y \in \{-1, 1\}$). Dakle

$$P(X = x, Y = y) = 0.5P(Y = y)$$

Lako se pokaže da je $P(X = x) = 0.5$ za $x \in \{-1, 1\}$, pa sledi da je $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$. Slično se pokazuje da su i X i Z nezavisne.

Sa druge strane $X = YZ$ i $Y + Z$ nisu nezavisne. Primetimo $P(X = 1, Y + Z = 0) = 0$, ali $P(X = 1)P(Y + Z = 0) > 0$.

4. Neka $X : \mathcal{U}(-1, 1)$ i neka svaka od nezavisnih slučajnih promenljivih X_k, $k \in \mathbb{N}$ ima raspodelu

$$X_k : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Pokazati da karakteristična funkcija zbira $Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}$ konvergira ka karakterističnoj funkciji promenljive X, kada $n \to \infty$.

Rešenje. Znamo da je $f_X(t) = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2it}, t \neq 0$ i $f_X(t) = 1$ za $t = 0$, odnosno $f_X(t) = \dfrac{\sin t}{t}, t \neq 0$. Dalje je $f_{X_k}(t) = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t$, pa sledi da je

$$f_{Y_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}\left(\frac{t}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin t}{2^n \sin \frac{t}{2^n}} \to \frac{\sin t}{t},\ n \to \infty.$$

5. Aparat za igru izbacuje broj $k \in \mathbb{N}$ sa verovatnoćom $p_k = \frac{2^{k-1}}{3^k}$. Ako izbaci broj koji pri deljenju sa 3 daje ostatak 1, igrač dobija 50 dinara, ako izbaci broj deljiv sa 3 nema ni dobitka, ni gubitka. Ukoliko se dobije broj koji pri deljenju sa 3 daje ostatak 2 gubi se 50 dinara. Odrediti verovatnoću da će posle 1000 igara dobitak biti između 100 i 200 dinara.

Rešenje. Neka slučajna promenljiva X_i označava dobitak igrača u i-toj igri, $i \in \{1, \ldots, 1000\}$. Tada je

$$P(X_i = 50) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{3k}}{3^{3k+1}} = \frac{9}{19},$$

$$P(X_i = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{3k-1}}{3^{3k}} = \frac{9}{38}$$

$$P(X_i = -50) = 1 - P(X_i = 50) - P(X_i = 0) = \frac{11}{38}.$$

Neka je $Y_{1000} = \sum_{i=1}^{1000} X_i$ ukupan dobitak u 1000 igara. Dalje verovatnoću $P(100 < Y_{1000} < 200)$ određujemo primenom centralne granične teoreme.