

Verovatnoća - kolokvijum, svi smerovi

16. decembar 2017.

1. Na ostrvu vlada diktator. Svaka porodica mora da ima dvoje dece, za svako dete je jednako verovatno da bude dečak ili devojčica. Ako su u porodici dve devojčice, prva koja se rodi mora da se zove Marija, druga ne sme da ima isto ime. Ako su u porodici dečak i devojčica, onda devojčica mora da se zove Marija (po diktatorovoj ženi). Zna se da slučajno izabrana porodica ima devojčicu Mariju. Koja je verovatnoća da ta porodica ima dve devojčice?
2. Neka je T neprekidna slučajna promenljiva koja predstavlja radni vek trajanja fena za kosu. Preciznije, T predstavlja vreme u godinama dok se fen ne pokvari i

$$P(T \geq t) = e^{-\frac{t}{3}}, \quad t \geq 0.$$

Milica je kupila fen koji je dve godine radio bez kvarova. Odrediti verovatnoću da se fen pokvari u trećoj godini.

3. Odrediti $c \in \mathbb{R}$ tako da funkcija $\varphi(x) = c(x + \sqrt{x})$, $0 < x < 1$ i $\varphi(x) = 0, x \notin (0, 1)$ bude funkcija gustine neke slučajne promenljive X . Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X i $P(X < 3)$, $P(X > 1)$.

Verovatnoća - kolokvijum, svi smerovi

16. decembar 2017.

1. Na ostrvu vlada diktator. Svaka porodica mora da ima dvoje dece, za svako dete je jednako verovatno da bude dečak ili devojčica. Ako su u porodici dve devojčice, prva koja se rodi mora da se zove Marija, druga ne sme da ima isto ime. Ako su u porodici dečak i devojčica, onda devojčica mora da se zove Marija (po diktatorovoj ženi). Zna se da slučajno izabrana porodica ima devojčicu Mariju. Koja je verovatnoća da ta porodica ima dve devojčice?
2. Neka je T neprekidna slučajna promenljiva koja predstavlja radni vek trajanja fena za kosu. Preciznije, T predstavlja vreme u godinama dok se fen ne pokvari i

$$P(T \geq t) = e^{-\frac{t}{3}}, \quad t \geq 0.$$

Milica je kupila fen koji je dve godine radio bez kvarova. Odrediti verovatnoću da se fen pokvari u trećoj godini.

3. Odrediti $c \in \mathbb{R}$ tako da funkcija $\varphi(x) = c(x + \sqrt{x})$, $0 < x < 1$ i $\varphi(x) = 0, x \notin (0, 1)$ bude funkcija gustine neke slučajne promenljive X . Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X i $P(X < 3)$, $P(X > 1)$.

- ① H_1 - porodica ima 2 devojčice
 H_2 - porodica ima dečaka i devojčicu
 H_3 - porodica ima 2 dečaka

$$P(H_1) = P(H_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad P(H_2) = \frac{1}{2}$$

A - porodica ima devojčicu Mariju

$$P(H_1|A) = ?$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i)P(A|H_i)$$

$$P(A|H_1) = 1, \quad P(A|H_2) = 1, \quad P(A|H_3) = 0$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + 0 = \frac{3}{4}$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 1}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

- ② T - radni vek trajanja fena za kosu

$$P\{T \geq t\} = 1 - P\{T < t\} = e^{-\frac{t}{5}}, \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow P\{T < t\} = 1 - e^{-\frac{t}{5}}, \quad t \geq 0$$

$$T: E\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\begin{aligned} P\{T < 3 | T \geq 2\} &= \frac{P\{2 \leq T < 3\}}{P\{T \geq 2\}} = \frac{F_T(3) - F_T(2)}{1 - F_T(2)} \\ &= \frac{1 - e^{-\frac{3}{5}} - 1 + e^{-\frac{2}{5}}}{1 - 1 + e^{-\frac{2}{5}}} = \frac{e^{-\frac{2}{5}}(1 - e^{-\frac{1}{5}})}{e^{-\frac{2}{5}}} = 1 - e^{-\frac{1}{5}} \end{aligned}$$

$$P\{T < 3 | T \geq 2\} = P\{T < 1\}$$

$$\textcircled{3} \quad \varphi(x) = c(x + \sqrt{x}), \quad 0 < x < 1$$

$$\varphi(x) = 0, \quad x \notin (0, 1)$$

Da bi $\varphi(x)$ bila funkcija gustine treba da važi:

$$1) \quad \varphi(x) \geq 0$$

$$2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$$

$$1) \quad \text{za } x \in (0, 1) \quad c(x + \sqrt{x}) \geq 0 \Leftrightarrow c \geq 0$$

za $c = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ali to nije funkcija gustine

$$2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \int_0^1 c(x + \sqrt{x}) dx = c \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 + c \left. \frac{x^{3/2}}{3/2} \right|_0^1$$

$$= \frac{c}{2} + \frac{2}{3}c = c \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) = \frac{7}{6}c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{6}{7}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \begin{cases} \frac{6}{7}(x + \sqrt{x}) & , x \in (0, 1) \\ 0 & , x \notin (0, 1) \end{cases}$$

$$F_X(x) = ?$$

$$x \leq 0 \quad P\{X < x\} = 0$$

$$x \geq 1 \quad F_X(x) = P\{X < x\} = 1$$

$$x \in (0, 1) \quad F_X(x) = P\{X < x\} = \int_0^x \frac{6}{7}(t + \sqrt{t}) dt$$

$$= \frac{6}{7} \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^x + \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{3} \left. t^{3/2} \right|_0^x = \frac{3}{7}x^2 + \frac{4}{7}x^{3/2}$$

$$P\{X < 3\} = F_X(3) = 1$$

$$P\{X > 1\} = 1 - P\{X \leq 1\} = 1 - \underbrace{P\{X = 1\}}_{=0} - F_X(1) = 1 - 1 = 0$$