Parcijalne diferencijalne jednačine - pismeni, februar 2015.

1. Rešiti početni problem
$$2z_x - 3z_y + (x+y)z = 0, \quad z(x,0) = x^2.$$

2. Naći rešenje problema
$$u_{tt} + 3u_t + u = u_{xx}, \quad 0 < x < 1,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x\sin(2\pi x).$$

3. Odrediti za koje $a, b \in \mathbb{R}$ funkcija $f(x,y) = (x^a + y^b \sin x)\sin y$ pripada prostoru $H^1(B_1(0))$, gde je $B_1(0)$ lopta sa centrom u 0 poluprečnika 1.

4. Posmatrajmo jednačinu $\Delta u + u = f$, gde je $\Delta u = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u$ i $u = u(x)$, $f = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Ako je $f = 0$ i ako tražimo rešenje $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, da li mora da važi $u = 0$?

(b) Ako je $f(x) = e^{-\|x\|^2/2}$ da li postoji rešenje u za koje važi da $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$?

Napomena: sa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ označavamo prostor brzo opadajućih funkcija na $\mathbb{R}^n$.

Parcijalne diferencijalne jednačine - pismeni, februar 2015.

1. Rešiti početni problem
$$2z_x - 3z_y + (x+y)z = 0, \quad z(x,0) = x^2.$$

2. Naći rešenje problema
$$u_{tt} + 3u_t + u = u_{xx}, \quad 0 < x < 1,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x\sin(2\pi x).$$

3. Odrediti za koje $a, b \in \mathbb{R}$ funkcija $f(x,y) = (x^a + y^b \sin x)\sin y$ pripada prostoru $H^1(B_1(0))$, gde je $B_1(0)$ lopta sa centrom u 0 poluprečnika 1.

4. Posmatrajmo jednačinu $\Delta u + u = f$, gde je $\Delta u = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u$ i $u = u(x)$, $f = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Ako je $f = 0$ i ako tražimo rešenje $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, da li mora da važi $u = 0$?

(b) Ako je $f(x) = e^{-\|x\|^2/2}$ da li postoji rešenje u za koje važi da $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$?

Napomena: sa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ označavamo prostor brzo opadajućih funkcija na $\mathbb{R}^n$.

Parcijalne diferencijalne jednačine - pismeni, april 2015.

1. Odrediti tip jednačine

$$y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0,\ x > 0,\ y > 0.$$

Svesti jednačinu na prvi kanonički oblik.

2. Naći rešenje problema

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a,\ 0 < y < b$$

$$u(0, y) = u(a, y) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0,\ u(x, b) = g(x).$$

3. Odrediti maksimalno $k \in \mathbb{N}$ tako da funkcija

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, a) \\ 0, & x \in (-a, 0] \end{cases}$$

pripada prostoru $W^{k,p}((-a, a))$, gde je $1 \leq p \leq \infty$.

4. (a) Neka $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Ako je $u = u_f$ za neko $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, dokazati da je onda definicija distribucionog izvoda $\partial u/\partial x$ konzistentna sa standardnom definicijom parcijalnog izvoda, odnosno pokazati da je $u_{\partial_x f} = \partial_x u_f$.

(b) Pretpostavimo da je $u(\phi) = \int_{\mathbb{R}^2} f(y)\phi(x, y)dxdy$ za sve $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ i za neku neprekidnu funkciju $f = f(y)$. Dokazati da je tada $\partial u/\partial x = 0$.

Parcijalne diferencijalne jednačine - pismeni, april 2015.

1. Odrediti tip jednačine

$$y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0,\ x > 0,\ y > 0.$$

Svesti jednačinu na prvi kanonički oblik.

2. Naći rešenje problema

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a,\ 0 < y < b$$

$$u(0, y) = u(a, y) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0,\ u(x, b) = g(x).$$

3. Odrediti maksimalno $k \in \mathbb{N}$ tako da funkcija

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, a) \\ 0, & x \in (-a, 0] \end{cases}$$

pripada prostoru $W^{k,p}((-a, a))$, gde je $1 \leq p \leq \infty$.

4. (a) Neka $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Ako je $u = u_f$ za neko $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, dokazati da je onda definicija distribucionog izvoda $\partial u/\partial x$ konzistentna sa standardnom definicijom parcijalnog izvoda, odnosno pokazati da je $u_{\partial_x f} = \partial_x u_f$.

(b) Pretpostavimo da je $u(\phi) = \int_{\mathbb{R}^2} f(y)\phi(x, y)dxdy$ za sve $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ i za neku neprekidnu funkciju $f = f(y)$. Dokazati da je tada $\partial u/\partial x = 0$.

Parcijalne diferencijalne jednačine

10. jun 2015.

1. Dat je početni problem

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xt} - 12u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Odgovarajućom smenom promenljivih svesti jednačinu na kanonički oblik $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = 0$.
   Naći opšte rešenje jednačine $u_{tt} + u_{xt} - 12u_{xx} = 0$.

   (b) Rešiti početni problem (1).

2. Rešiti problem

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u,\ u = u(x,y,t),\ t \geq 0,\ 0 < x < a,\ 0 < y < b, \\ u(x,y,0) = \phi(x,y), \\ u_t(x,y,0) = \psi(x,y), \\ u(0,y,t) = 0,\ u(a,y,t) = 0, \\ u(x,0,t) = 0,\ u(x,b,t) = 0, \end{cases}$$

   pri čemu je $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

   Ideja: tražiti rešenje u obliku $u(x,y,t) = v(x,y)T(t)$, odnosno koristiti metodu razdvajanja promenljivih.

3. Odrediti $a \in \mathbb{R}$ za koje funkcija $f(x,y) = x|y|^a \cos(2x)$ pripada prostoru Soboljeva $H^1([-2,2] \times [-2,2])$.

4. (a) Pokazati da za distribuciju $vp(\frac{1}{x})$ datu sa

$$vp\Big(\frac{1}{x}\Big)(\varphi) := \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx,\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

   važi

$$vp\Big(\frac{1}{x}\Big) \cdot x = 1.$$

   (b) Pokazati da je

$$\mathcal{F}\Big(vp\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) = \frac{2\pi}{i} H(x) + c,$$ gde je $H(x)$ Hevisajdova distribucija,

   za neku konstantu $c \in \mathbb{R}$. Da li je konstanta c jedinstvena?

Parcijalne diferencijalne jednačine - pismeni ispit
- septembar 2015 -

1. (a) Naći bar tri linearno nezavisna rešenja za jednačinu
$$(1+t)u_t = c^2 u_{xx}$$
za $x \in [-\alpha, \alpha], t \geq 0$ i $u(t,-\alpha) = u(t,\alpha) = 0$.

   (b) Ako je $u(0,x) = A\cos\left(\frac{\pi x}{2\alpha}\right)$ naći $u(t,x)$ za $x \in [-\alpha,\alpha], t \geq 0$ i za iste rubne uslove koji važe u prvom delu zadatka.

2. Dat je početni problem
$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ u(x,0) = \gamma\cos(x/\gamma),\ u_y(x,0) = 0,\ \gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$
   (a) Pokazati da je funkcija $u(x,y) = \gamma\cosh(y/\gamma)\cos(x/\gamma)$ rešenje datog problema.

   (b) Ispitati zavisnost rešenja od početnih uslova. Preciznije, proveriti da li važi: $\forall (x,y)\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tako da
$$|u(x,0)| < \delta,\ |u_y(x,0)| < \delta \Rightarrow |u(x,y)| < \varepsilon.$$

3. Neka je $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1, x \neq 0\}$. Ispitati za koje $m \in \mathbb{N}_0$ i za koje $p \in [1,\infty]$ funkcija $u : \Omega \to \mathbb{R}$ data sa $u(x,y) = \mathrm{sgn}x$ pripada prostoru $W^{m,p}(\Omega)$. Sa $\mathrm{sgn}x$ je označena signum funkcija.

4. Dokazati da je sa
$$u(\phi) = \int_{\mathbb{R}^2} |x_1 x_2| \phi''(\|x\|)dx, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$
definisana distribucija na $\mathbb{R}$, odnosno da $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

5. Data je funkcija $f(\cdot) = e^{-|\cdot|}$, definisana na $\mathbb{R}$. Dokazati da je $D^2 f + f = 2\delta$. Odrediti $\mathcal{F}f$.

Parcijalne diferencijalne jednačine - pismeni ispit

5. oktobar 2015.

1. Naći kompletno, opšte i singularno rešenje diferencijalne jednačine

$$xz_x(x,y) + \frac{z_y(x,y)}{y} = z(x,y),$$

a zatim naći i ono rešenje koje prolazi kroz krivu $y = 0$, $z = x$.

2. Rešiti višedimenzionalnu difuznu jednačinu

$$u_t(x,y,t) = ku_{xx}(x,y,t) + cu_{yy}(x,y,t),$$
$$u(x,y,0) = e^x + e^y,$$
$$u_y(x,0,t) = 0,$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad y,t,k,c > 0.$$

3. Odrediti za koje $a \in \mathbb{R}$ funkcija

$$f(x) = |x| \Big(a\,(1 + sgn(x)) + a^2\,(1 - sgn(x)) \Big)$$

pripada prostoru Soboljeva $W^2\,((-5,5))$.

4. Ako $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ i $x\partial u + u = 0$, onda je $u = A\;vp(\frac{1}{x}) + B\delta$ za $A, B \in \mathbb{C}$. Dokazati.

   Uputstvo: jednačina može da se zapiše u obliku $\partial(xu) = 0$. Dalje koristiti bez dokaza da ako je $u' = 0$, onda je u konstanta.

5. Pokazati da je sa $\langle u, \phi \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \partial^k \phi(\frac{1}{k})$ definisana distribucija na $(0, \infty)$.

Parcijalne diferencijalne jednačine - pismeni ispit

28. februar 2016.

1. Pokazati da je za jednačinu $f(z,p,q) = 0$, gde je $p = z_x$ i $q = z_y$ kompletno rešenje dato sa $F(z) = x + ay + b$, gde su $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Rešiti problem

$$u_{xx} - u_{tt} = u + \sin(\frac{\pi x}{4}), \quad x \in (0,2),\ t > 0$$

$$u(0,t) = 2, \quad u(2,t) = t - 2, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 2, \quad u_t(x,0) = x^3 \quad x \in (0,2).$$

3. Data je jednačina

$$u_{xx} + 6u_{xy} - 16u_{yy} = 0.$$

Odrediti tip jednačine, svesti je na kanonički oblik. Rešiti jednačinu.

4. Odrediti za koje $a \in \mathbb{R}$ funkcija $f(x,y) = y^2|x|^a\cos(3x)$ pripada prostoru Soboljeva $H^1((-2,2)\times(-2,2))$.

5. (a) Pokazati da je $x^k\partial^m\delta = (-1)^k\dfrac{m!}{(m-k)!}\partial^{m-k}\delta$ za $x \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$ i $m = 0, 1, 2, \ldots$.

   (b) Rešiti jednačinu $x^k u = 0$ u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, gde je $k \in \mathbb{N}$.

Svaki zadatak vredi 12 poena.

Parcijalne diferencijalne jednačine - pismeni ispit
5. april 2016.

1. Rešiti početni problem
$$u(x_1, x_2)(x_1 + x_2)\frac{\partial u}{\partial_{x_1}} + u(x_1, x_2)(x_2 - x_1)\frac{\partial u}{\partial_{x_2}} = -(x_1^2 + x_2^2),\ u(x_1, 0) = 0.$$

2. Rešiti problem
$$u_t = u_{xx} + \cos x, \quad x \in [0, 2\pi],\ t > 0,$$
$$u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = \cos x + \cos 2x, \quad x \in [0, 2\pi].$$

3. Data je jednačina $au_{xx} + bu_{yy} + cu_x + du_y - eu = 0,\ a, b, e > 0,$ $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ i Ω je ograničen i otvoren.
   (a) Pokazati da u ne može da ima pozitivan maksimum ili negativan minimum u unutrašnjosti od Ω.
   (b) Dokazati da je jedina fuunkcija koja zadovoljava jednačinu u Ω tako da je $u = 0$ na $\partial\Omega$ i $u \in C(\bar{\Omega})$ funkcija $u = 0$.

4. Dat je skup $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$ i funkcija
$$f(x, y) = |x - y|^a \sin(x - y).$$
   Odrediti za koje $a \in \mathbb{R}$ slabi izvod f_x pripada prostoru $L^2(\Omega)$.

5. Pokazati da jednačina $\frac{\partial u}{\partial x} + cu(x) + u(x - 1) = f(x)$ ima jedinstveno rešenje $u \in L^2(\mathbb{R})$ za svako $f \in L^2(\mathbb{R})$, kada je $|c| > 1,\ c \in \mathbb{R}$.

Svaki zadatak vredi 12 poena.

Parcijalne diferencijalne jednačine - pismeni ispit

16. jun 2016.

1. Data je jednačina
$$xu_{xx} + (x-y)u_{xy} - yu_{yy} = 0, \; x > 0, \; y > 0.$$
Odrediti oblast u kojoj je jednačina hiperbolična i svesti jednačinu na prvu kanoničku formu, tj. formu u obliku $u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$. Rešiti jednačinu.

2. Dat je problem
$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad x \in [0,2], \; t > 0, \\ u(0,t) &= 1, \; u(2,t) = 3, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= x^2 - x + 1, \quad x \in [0,2]. \end{aligned}$$
Rešiti problem i odrediti $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$.

3. Data je jednačina $u_{tt} - c^2 u_{xx} + 2bu_t + b^2 u = 0, \; x > 0, t > 0$ sa uslovima $u(x,0) = \phi(x), \; x > 0, \; u_t(x,0) = \psi(x), \; x > 0$ i $u(0,t) = 0, \; t > 0$. Rešiti jednačinu.

   Uputstvo: uvesti smenu $u(x,t) = e^{\alpha t} v(x,t)$ za odgovarajuće $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Neka je $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$ i neka je data funkcija $f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{2}{3}} \sin(\pi x_2)$. Odrediti maksimalno $k \in \mathbb{N}_0$ tako da $f \in H^k(\Omega)$.

5. Neka su $\alpha, y \in \mathbb{R}$ i neka je data funkcija
$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-i\alpha x}}{2\sqrt{\pi y}}, & |x| \le y, \\ 0, & |x| > y. \end{cases}$$
   (a) Odrediti Furijeovu transformaciju $\hat{f}(\xi)$.

   (b) Pokazati da je $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\alpha - \xi)y}{(\alpha - \xi)^2} d\xi = \pi y$.

   Uputstvo: koristiti formulu $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$ i prethodni deo zadatka.

Svaki zadatak vredi 12 poena.

Parcijalne diferencijalne jednačine - pismeni ispit

31. avgust 2016.

1. Neka je $u = u(x, y)$ rešenje jednačine $xu_x + yu_y = nu, n > 0$. Pokazati da je u pozitivno homogena funkcija reda n, odnosno da za svako $l > 0$ važi $u(lx, ly) = l^n u(x, y)$.

2. Dat je problem
$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in [0, L],\ t > 0,$$
$$u(0, t) = 0,\ u(L, t) = B, \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = g(x), u_t(x, 0) = h(x), \quad x \in [0, L].$$
Rešiti problem i ispitati kada postoji $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x, t)$.

3. Data je jednačina $u_t - u_{xx} = -1$, $0 < x < 1$, $t > 0$ sa uslovima $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = u(1, t) = \sin \pi t$. Da li postoji $0 < x_0 < 1$ tako da je $u(x_0, 1) = 1$? Obrazložiti odgovor.

4. Ispitati da li funkcija
$$v(x, y) = \log\left(\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right) - \log(\log 2016)$$
pripada prostoru $H^1(B_1)$, gde je $B_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

5. Rešiti početni problem $u_t = u_{xx} + xu$, $u(x, 0) = g(x)$, gde je $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $g \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$.

Svaki zadatak vredi 12 poena.

Parcijalne diferencijalne jednačine - pismeni ispit

9. februar 2017.

1. Data je jednačina $a(x)u_x^2 + b(y)u_y^2 = f(x) + g(y)$, gde su $a, b \in C(I)$ na nekom intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Naći rešenje u obliku $u(x,y) = v(x) + r(y)$. Primeniti na jednačinu $u_x^2 + u_y^2 = 1$.

2. Rešiti mešoviti problem
$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in [0,l],\ t > 0,$$
$$u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = x,\ \ u_t(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2l} + \sin\frac{3\pi x}{2l}, \quad x \in [0,l].$$

3. (a) Svesti jednačinu $x^2u_{xx} + u_{yy} + 2xu_x + u_y ctgy = 0$, $x > 0$, $y \in (0, \pi/2)$ na kanonički oblik.

   (b) Naći funkciju $f \in C^2(0,\infty)$ tako da je $u(x,y) = f(x)\cos(y)$ i $u(1,y) = \cos y$, $\lim_{x\to\infty} u_x(x,y) = 0$.

4. Odrediti za koje $a \in \mathbb{R}$ funkcija $f(x,y) = y|x|^a \sin(3x)$ pripada prostoru $H^1((-1,1)\times(-1,1))$.

5. Rešiti početni problem $u_t = u_{xx} + xu_x$, $u(x,0) = g(x)$, gde je $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $g \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$.

Svaki zadatak vredi 12 poena.

Parcijalne diferencijalne jednačine - pismeni ispit

16. jun 2017.

1. Odrediti $a, b \in \mathbb{R}$ tako da jednačina $(2y + 3z)dx + (2x + az)dy + (3x + by)dz = 0$ zadovoljava uslov integrabilnosti i rešiti dobijenu jednačinu.

2. Neka je $u(x,t)$ rešenje jednačine

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (0,2),\ t > 0$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(2,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \sin x \quad x \in (0,2).$$

Pokazati da je funkcija $F(t) = \int_0^2 e^{u(x,t)}dx$ opadajuća za $t \geq 0$.

3. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ otvoren i ograničen skup i neka je $\Delta u = 0$ u Ω. Pokazati da je

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |\nabla u(x)| = \max_{x \in \partial\Omega} |\nabla u(x)|.$$

4. Rešiti jednačinu $u_{tt} + (\alpha + \beta)u_t + \alpha\beta u = c^2 u_{xx},\ x \in \mathbb{R}, t > 0$, za $\alpha = \beta \in \mathbb{R}$ i $c > 0$.

5. Neka je $g \in C^\infty((0,1))$. Za koje $1 \leq p \leq \infty$ funkcija $f(x) = \int_0^x g(t)dt$, $x \in (0,1)$, pripada prostoru $W^{1,p}((0,1))$?

Svaki zadatak vredi 12 poena.

Parcijalne diferencijalne jednačine - pismeni ispit
5. april 2017.

1. Rešiti jednačinu $xu_x - yu_y = u - y,\ u(y^2, y) = 0$, gde je $x \in \mathbb{R}, y > 0$
2. (a) Rešiti mešoviti problem

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x \in (0,\pi),\ y \in (0,1),$$

$$u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0, \quad y \in (0,1),$$
$$u(x,0) = 0,\ u(x,1) = \cos x, \quad x \in (0,\pi).$$

   (b) Da li postoje $x_0 \in (0,\pi)$ i $y_0 \in (0,1)$ tako da rešenje u problema iz (a) dostiže maksimum u (x_0, y_0)? Obrazložiti odgovor.

3. Neka je $u(x,t)$ rešenje jednačine

$$u_t - ku_{xx} + p(t)u = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,, \quad u(x,0) = f(x),\ x \in \mathbb{R}$$

   i neka je $g(t)$ rešenje jednačine

$$g'(t) = p(t)g(t),\ g(0) = 1.$$

   Pokazati da je tada $v(x,t) = g(t)u(x,t)$ rešenje jednačine

$$v_t - kv_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ v(x,0) = f(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

4. Rešiti jednačinu

$$u_t - u_{xx} + (\cos t)u = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,, \quad u(x,0) = e^{-x},\ x \in \mathbb{R}.$$

5. Data je funkcija

$$u(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\alpha/2}\log(2017+x^2)},\ x \in \mathbb{R}.$$

   Neka je $0 < \alpha < 1$. Za koje $p \in \mathbb{R}$ važi da $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$?

Svaki zadatak vredi 12 poena.

Parcijalne diferencijalne jednačine - pismeni ispit
13. septembar 2017.

1. Naći funkciju f tako da $u(x,y) = xf(y) + yf(x)$, $x, y \in \mathbb{R}$ bude rešenje jednačine $u_{xx} + u_{yy} = u$.

2. Rešiti jednačinu

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in [0,l],\ t \geq 0$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = 0, \quad x \in (0,l),$$
$$u_t(x,0) = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako } 0 \leq x < \alpha, \\ v, & \text{ako } \alpha \leq x \leq \beta, \\ 0, & \text{ako } \beta < x \leq l, \end{cases}$$

gde su α, β, l, v konstante i $l, v, a > 0$. Za $\alpha = 0, \beta = l$ pokazati da je

$$\max_{0 \leq x \leq l, t \geq 0} u(x,t) = u\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2a}\right) = \frac{lv}{2a}.$$

3. Data je jednačina $u_t = a^2 u_{xx}$, $u(x,0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}, t > 0$ i $a > 0$. Pretpostavimo da je $f \in C^2(\mathbb{R})$ funkcija za koju važi $|f(x)| \leq e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Pokazati da je

$$|u(x,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2 t}} e^{\frac{-x^2}{1+4a^2 t}}.$$

4. Data je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = H(x) - \operatorname{sgn} y$. Pokazati da slab izvod $\partial^\alpha f$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}_0^2, \alpha \neq 0$ postoji ako i samo ako je $\alpha_1 \geq 1, \alpha_2 \geq 1$. Da li postoji $k \in \mathbb{N}_0$ tako da $f \in H^k(\mathbb{R}^2)$?

5. Odrediti sve funkcije $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ koje zadovoljavaju jednačinu

$$u_{xx} + x u_x + nu = 0, \ \ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}.$$

Svaki zadatak vredi 12 poena.

Parcijalne diferencijalne jednačine - pismeni ispit
20. septembar 2017.

1. Rešiti jednačinu $az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} = 0$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $ac - b^2 < 0$.

   Ideja: koristiti transformacije $u = x + \alpha y, v = x + \beta y$. Odabrati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ na takav način da se dobije jednačina $z_{uv} = 0$.

2. Rešiti problem

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x \in (0, \pi),\ 0 < y < 1$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad u_x(\pi, y) = 0, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = \cos x, \quad x \in (0, \pi).$$

   Naći max $u(x, y)$ u oblasti $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 1$.

3. Data je jednačina $u_t - u_{xx} = 0,\ t \ge 0,\ 0 \le x \le 1$ sa uslovima $u(0, x) = f(x), 0 \le x \le 1$ i $u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0, t \ge 0$. Pokazati da je funkcija $E(t) = \int_0^1 u(t, x)dx$ konstantna.

4. Dat je početni problem $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,\ t \ge 0,\ x \in \mathbb{R}, c > 0$ sa uslovima $u(x, 0) = f(x),\ u_t(x, 0) = g(x),\ x \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da važi $\lim_{|x|\to\infty} f(x)/|x| = a \in \mathbb{R}$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = b \in \mathbb{R}$. Pokazati da je

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{u(x, t)}{t} = c \in \mathbb{R}.$$

5. Data je funkcija

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x < 1/n, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

   (a) Pokazati da je $\lim_{n\to\infty} f_n = \delta$ u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   (b) Pokazati da $\lim_{n\to\infty} f_n^2$ ne postoji u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   (c) Odrediti $\lim_{n\to\infty} (f_n^2 - n\delta)$ u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Svaki zadatak vredi 12 poena.