Verovatnoća, pismeni ispit, 28.8.2017.

Verovatnoća - pismeni ispit, smerovi M0, M1, M2, M3, M4

28. avgust 2017.

1. U loto igri četvorocifreni broj se bira na slučajan način u rasponu 0000 − 9999. Ako se na tiketu poslednje dve cifre poklapaju sa izvučenim brojem, ali ne i poslednje tri, nagrada je 50 evra. Zatim, nagrada je 500 evra ako se na tiketu poslednje tri cifre poklapaju, ali ne i sve četiri i 5000 evra se dobija u slučaju poklapanja svih cifara. Naći očekivani dobitak.

2. Neprekidne slučajne promenljive X i Y imaju zajedničku funkciju gustine

$$\varphi_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} cxe^{\frac{-1}{2}x(1+y^2)}, & x, y > 0 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odrediti konstantu c. Odrediti marginalne gustine φ_X i φ_Y. Pokazati da su $Y\sqrt{X}$ i X nezavisne slučajne promenljive.

3. Vek trajanja sijalice je dat eksponencijalnom raspodelom. Ako je srednja vrednost veka trajanja sijalice od 60 vati 400 sati, a srednja vrednost veka trajanja sijalice od 80 vati 300 sati, naći verovatnoću da sijalica od 80 vati traje duže od sijalice od 60 vati. Pretpostavlja se da sijalice rade nezavisno jedna od druge.

4. Ako niz slučajnih promenljivih $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u srednje kvadratnom ka slučajnoj promenljivoj X, dokazati da onda i $E(X_n) \to E(X), n \to \infty$.

5. Broj ljudi koji uđu u hiper market u toku jednog minuta ima Poasonovu $\mathcal{P}(7)$ raspodelu.
   (a) Odrediti verovatnoću da u toku tri sata u hiper market uđe bar 800 ljudi.
   (b) Koliko vremena treba da prođe da bi sa verovatnoćom 0.9 u hiper market ušlo bar 800 ljudi?

4. $X_n \xrightarrow{s.k.} X$, $n\to\infty$ akko 1) $E(X_n^2) < \infty$ i

2) $E(|X_n - X|^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Znamo da je $0 \le \left(E(X_n) - E(X)\right)^2 = \left(E(X_n - X)\right)^2 \le E(X_n - X)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \quad E(X_n) \to E(X), n\to\infty.$

Napomena: za $Z = X_n - X$ važi $D(Z) \ge 0$, odnosno,

$D(Z) = E(Z^2) - E^2(Z) \ge 0$, pa je

$E(Z^2) \ge E^2(Z)$, odnosno

$\left(E(X_n - X)\right)^2 \le E|X_n - X|^2.$

(6.) Neka je X - vek trajanja sijalice od $\cancel{100}$ 60 vati,

Y - vek trajanja sijalice od 80 vati.

Treba odrediti $P(X < Y)$

Znamo, $\varphi_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0, \quad \varphi_X(x) = 0, x < 0$

$$\varphi_Y(y) = \mu e^{-\mu y}, y \geq 0, \quad \varphi_Y(y) = 0, y < 0$$

Iz podataka u zadatku znamo da je $\frac{1}{\lambda} = 400$ i $\frac{1}{\mu} = 300$.

Pošto su X i Y nezavisne, sledi da je

$$P(X<Y) = \int_0^\infty \int_x^\infty \varphi_X(x)\,\varphi_Y(y)\,dx\,dy = \int_0^\infty \varphi_X(x)\left(1 - F_Y(x)\right)dx,$$

gde je F_Y funkcija raspodele sluč. prom. Y

$$\Rightarrow P(X<Y) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{-\mu x}\,dx = \lambda \cdot \frac{1}{\mu+\lambda}.$$

(5.) X_i - broj ljudi koji uđu u super market u toku i-tog minuta

$X_i : \mathcal{P}(7) \qquad E(X_i) = 7, \quad D(X_i) = 7$

Broj ljudi koji uđu u toku n minuta je: $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E(Y_n) = 7n, \quad D(Y_n) = 7n$$

Sluč. prom. $X_1, \ldots, X_n$ su nezavisne i sve imaju istu raspodelu, pa važi centralna granična teorema

(a) $n = 180 \qquad P(Y_{180} \geq 800) = 1 - P(Y_{180} < 800)$

$$P\left(\frac{Y_{180} - 7 \cdot 180}{\sqrt{7 \cdot 180}} < \frac{800 - 7 \cdot 180}{\sqrt{7 \cdot 180}}\right) = \ldots$$

(b) $P(Y_n \geq 800) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{800-7n}{\sqrt{7n}}\right) = 0.90$

$$\frac{800-7n}{\sqrt{7n}} = \ldots$$

2.

$$\varphi_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} cxe^{-\frac{1}{2}x(1+y^2)}, & x,y>0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$c = ?$, φ_X, φ_Y? $Y\sqrt{X}$ i X nezavisne?

Treba da važi: $1 = \int_0^\infty \int_0^\infty cx e^{-\frac{1}{2}x(1+y^2)} dx dy =$

$$= c\int_0^\infty \left(x e^{-\frac{1}{2}x} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}xy^2} dy\right) dx =$$

$$= c\int_0^\infty x e^{-\frac{1}{2}x} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2/\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} dy\, dx$$

Važi: $\frac{1 \cdot 2}{a\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{a^2}} dy = 1$, $a>0$

Dakle, $\frac{\sqrt{x}\cdot 2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2/\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} dy = 1$, odnosno $\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{x}}$

$$\Longrightarrow \quad 1 = c\int_0^\infty \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{x}} x e^{-\frac{1}{2}x} dx = \frac{c}{2}\int_0^\infty \sqrt{2\pi}\, x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} dx$$

$s = +\frac{1}{2}x$

$+2ds = dx$

$$1 = \frac{c}{2}\int_0^\infty \sqrt{2\pi}\sqrt{2s}\, e^{-s}\, 2ds = 2\frac{c}{2}\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\int_0^\infty s^{\frac{1}{2}} e^{-s} ds$$

Znamo: $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ (Gama funkcija)

Dakle, $1 = \frac{2c}{2}\sqrt{2}\sqrt{2\pi}\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4c}{2}\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4c}{2}\sqrt{\pi}\ \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{2c\pi}{2} = c\pi$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad \boxed{c = \frac{1}{\pi}}$$

- $\varphi_X(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty x e^{-\frac{1}{2}x(1+y^2)} dy$, za $x>0$

$\varphi_Y(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty x e^{-\frac{1}{2}x(1+y^2)} dx$, $y>0$

Dobija se, $\varphi_X(x) = \frac{1}{\pi} x e^{-\frac{1}{2}x}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}xy^2} dy = \frac{1}{\pi} x e^{-\frac{1}{2}x}\frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{x}e^{-\frac{1}{2}x}$

$$\varphi_Y(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty x e^{-\frac{1}{2}x(1+y^2)} dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{2s}{1+y^2} e^{-s}\frac{2ds}{1+y^2} =$$

$\frac{1}{2}x(1+y^2) = s$

$$= \frac{4}{\pi}\frac{1}{(1+y^2)^2}\int_0^\infty s e^{-s} ds$$

parcijalna integracija

$$= \frac{4}{\pi}\frac{1}{(1+y^2)^2}\cdot 1, \quad y>0$$

Dalje treba ispitati nezavisnost sluč. prom. $V = Y\sqrt{X}$ i $W = X$.

Prvo ćemo odrediti zajedničku gustinu za V i W

$v = y\sqrt{x}$

$w = x \Rightarrow x = w, \quad y = \frac{v}{\sqrt{w}} \qquad (x>0, w>0)$

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{w}} & y_w \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{w}}$$

$\Rightarrow \varphi_{(V,W)}(v,w) = \frac{1}{\pi} w e^{-\frac{1}{2}w\left(1+\frac{v^2}{w}\right)}\left|-\frac{1}{\sqrt{w}}\right| = \frac{1}{\pi}\sqrt{w}\, e^{-\frac{1}{2}w} e^{-\frac{1}{2}v^2}, \quad v,w>0$

$\varphi_{(V,W)}(v,w) = 0$, inače

$$\varphi_V(v) = \int_0^\infty \varphi_{(V,W)}(v,w)\,dw, \quad \varphi_W(w) = \int_0^\infty \varphi_{(V,W)}(v,w)\,dv$$

$$\varphi_V(v) = \int_0^\infty \frac{1}{\pi}\sqrt{w}\, e^{-\frac{1}{2}w} e^{-\frac{1}{2}v^2}\,dw = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}v^2} \int_0^\infty \sqrt{w}\, e^{-\frac{1}{2}w}\,dw$$

$$\int_0^\infty \sqrt{w}\, e^{-\frac{1}{2}w}\,dw = 2\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 2\sqrt{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{2}\sqrt{\pi}$$

$$\varphi_V(v) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}v^2}\sqrt{2}\sqrt{\pi}, \quad \text{za } v>0$$

$$\varphi_W(v) = \int_0^\infty \frac{1}{\pi}\sqrt{w}\, e^{-\frac{1}{2}w} e^{-\frac{1}{2}v^2}\,dv = \frac{1}{\pi}\sqrt{w}\, e^{-\frac{1}{2}w} \underbrace{\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}v^2}\,dv}_{=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}}$$

$$\varphi_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{w}\, e^{-\frac{1}{2}w}, \quad w>0$$

$$\Rightarrow \varphi_V(v)\cdot\varphi_W(w) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{\pi} e^{-\frac{1}{2}v^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{w}\, e^{-\frac{1}{2}w} = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}v^2}\sqrt{w}\, e^{-\frac{1}{2}w}$$

$$\Rightarrow \varphi_V(v)\,\varphi_W(w) = \varphi_{(V,W)}(v,w), \text{ za sve } v, w$$

$\Rightarrow V$ i W su nezavisne sluč. prom.

(1) Neka je X – dobitak (u eurima)

Slučajna prom. X uzima vrednosti 0, 50, 500 ili 5000.

$$P(X=50) = \frac{10\cdot 9\cdot 1\cdot 1}{10\,000}$$

$$P(X=500) = \frac{9\cdot 1\cdot 1\cdot 1}{10\,000}, \quad P(X=5000) = \frac{1}{10\,000}$$

$$P(X=0) = 1 - \frac{10\cdot 9}{10\,000} - \frac{9}{10\,000} - \frac{1}{10\,000}$$

$$E(X) = 0 + 50\cdot\frac{9\cdot 10}{10\,000} + 500\cdot\frac{9}{10\,000} + 5\,000\cdot\frac{1}{10\,000}$$