Stohastička analiza - pismeni ispit

20. jun 2017.

1. Neka je $(W_t)_{t\geq 0}$ standardno Braunovo kretanje.

   (a) Naći raspodelu slučajne promenljive $X = W_{\frac{1}{3}} - 3W_5 + 7c$, za neko $c \in \mathbb{R}$.

   (b) Odrediti $E((W_4)^2|W_2)$.

   Rešenje:

   (a) Primetimo da je $W_{\frac{1}{3}} - 3W_5 + 7c = -3(W_5 - W_{\frac{1}{3}}) - 2W_{\frac{1}{3}} + 7c$. Slučajne promenljive $W_5 - W_{\frac{1}{3}}$ i $W_{\frac{1}{3}}$ su nezavisne, zato što Braunovo kretanje ima nezavisne priraštaje. Znamo da $W_5 - W_{\frac{1}{3}} : \mathcal{N}(0, 5 - \frac{1}{3})$ i $W_{\frac{1}{3}} : \mathcal{N}(0, \frac{1}{3})$. Zbir nezavisnih slučajnih promenljivih sa normalnom raspodelom i konstante, ponovo ima normalnu raspodelu. Kako je $E(X) = 7c$ i

   $$D(X) = 9D(W_5 - W_{\frac{1}{3}}) + 4D(W_{\frac{1}{3}}) = \frac{130}{3},$$

   sledi da $X : \mathcal{N}(7c, \frac{130}{3})$.

   (b) $E((W_4)^2|W_2) = E((W_4 - W_2 + W_2)^2|W_2) = E((W_4 - W_2)^2 + W_2^2 + 2W_2(W_4 - W_2)|W_2) = E((W_4 - W_2)^2|W_2) + W_2^2 + 2W_2E(W_4 - W_2|W_2)$. Dalje se koristi da $W_4 - W_2 : \mathcal{N}(0, 2)$, pa je $E(W_4 - W_2|W_2) = E(W_4 - W_2) = 0$ i $E((W_4 - W_2)^2|W_2) = 2$. Dakle, $E((W_4)^2|W_2) = W_2^2 + 2$.

2. U radu sa određenim genom vinske mušice, genetičari klasifikuju svaku pojedinačnu vinsku mušicu kao dominantnu, hibridnu ili recesivnu. Kao deo eksperimenta prvo se vinska mušica ukršta sa hibridom, pa se izdanak ukršta sa hibridom itd. Izdanak svake generacije se beleži kao dominantan, hibridan ili recesivan. Verovatnoće da je izdanak dominantan, hibridan ili recesivan zavise samo od tipa vinske mušice sa kojom je hibrid ukršten, a ne i od genetskog sastava prethodne generacije. Izdanak dominantne individue ukršten sa hibridom je dominantan 50% vremena, a hibridan 50% vremena. Izdanak hibrida ukrštenog sa hibridom je dominantan 25%, hibridan 50% i recesivan 25% vremena, dok je izdanak recesivne individue ukršten sa hibridom hibrid 50% i recesivan 50% vremena.

   (a) Napisati matricu prelaza za ovaj problem.

   (b) Koja je verovatnoća da je treća generacija izdanka dominantna, ako je prva generacija izdanka recesivna?

   (c) Ako je istraživanje započeto sa populacijom vinskih mušica koja je 20% dominantna, 50% hibridna i 30% recesivna, koji procenat populacije je dominantan posle 3 generacije ?

   Solution:

   (a) Consider 3 states: dominant, hybrid and recessive and denote them by 1,2 and 3, respectively. The transition matrix for this problem is

   $$T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

   (b) To answer to this question is necessary to compute T^2

   $$T^2 = \begin{bmatrix} 3/8 & 1/2 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 1/2 & 3/8 \end{bmatrix}.$$

   So, $p_{13}(2) = 1/8$.

(c) First we need to find p_0T^3, where $p_0 = (0.2, 0.5, 0.3)$.

$$p_0T^3 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/16 & 1/2 & 3/16 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 3/16 & 1/2 & 5/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39/160 & 1/2 & 41/160 \end{bmatrix}$$

So, after 3 generations 390/160% of the population us dominant.

3. Tokom dobre godine, oluje se javljaju u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom 3 po jedinici vremena, dok se u ostalim godinama one javljaju u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom 5 po jedinici vremena. Poznato je da će sledeća godina biti dobra sa verovatnoćom 0.3. Neka je sa N_t označen broj oluja tokom prvih t vremenskih jedinica u toku sledeće godine.

   (a) Pronaći verovatnoću da se u prvih t vremenskih jedinica sledeće godine desilo n oluja.

   (b) Da li je $\{N_t,\, t \geq 0\}$ Poasonov proces ?

   (c) Da li $\{N_t,\, t \geq 0\}$ ima stacionarne priraštaje ? Objasniti.

   (d) Ako sledeća godina počne sa 3 oluje do vremena $t = 1$, koja je verovatnoća da je dobra godina ?

   Solution:
   For simplicity, let G be the event that next year is a good year, and B the event that next year is not good. We have $P\{G\} = 0.3 = 1 - P\{B\}$.

   (a) $P\{N_t = n\} = P\{N_t = n|G\}P\{G\} + P\{N_t = n|B\}P\{B\} = 0.3\frac{(3t)^n}{n!}e^{-3t} + 0.7\frac{(5t)^n}{n!}e^{-5t}$

   (b) From (a) we can see that $P\{N_t = n\}$ does not have PMF of the form of Poisson distribution. So, $\{N_t,\, t \geq 0\}$ is not Poisson process.

   (c) For any $s > 0$, we have

   $$\begin{aligned} P\{N_{t+s} - N_s = n\} &= P\{N_{t+s} - N_s = n|G\}P\{G\} + P\{N_{t+s} - N_s = n|B\}P\{B\} \\ &= 0.3\frac{(3t)^n}{n!}e^{-3t} + 0.7\frac{(5t)^n}{n!}e^{-5t} \end{aligned}$$

   Since $P\{N_{t+s} - N_s = n\}$ does not change with s, we can conclude that process $\{N_t\}$ has stationary increments.

   (d) We need to find $P\{G|N_1 = 3\}$.

   $$\begin{aligned} P\{G|N_1 = 3\} &= \frac{P\{G \cap \{N_1 = 3\}\}}{P\{N_1 = 3\}} \\ &= \frac{P\{N_1 = 3|G\}P\{G\}}{P\{N_1 = 3|G\}P\{G\} + P\{N_1 = 3|B\}P\{B\}} \\ &= \frac{0.3\frac{3^3}{3!}e^{-3}}{0.3\frac{3^3}{3!}e^{-3} + 0.7\frac{5^3}{3!}e^{-5}} = 0.406 \end{aligned}$$

4. Neka je $(W_t)_{t \geq 0}$ standardno Braunovo kretanje. Dat je proces

   $$M_t = (W_t^2 - t)^2 - 4\int_0^t W_s^2 ds.$$

   Odrediti dMt. Izraziti M_t kao stohastički integral.

   Rešenje:
   Neka je $X_t = (W_t^2 - t)^2$. Tada je $dM_t = dX_t - 4W_t^2 dt$. Da bismo odredili dX_t koristimo Itovu formulu, sa funkcijom $u(t, x) = (x^2 - t)^2$. Dobija se

   $$dM_t = 4W_t^2 dt + 4W_t(W_t^2 - t)dW_t - 4W_t^2 dt,$$

   odnosno

   $$M_t = \int_0^t 4W_s(W_s^2 - s)dW_s.$$

5. Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih, pri čemu sve slučajne promenljive imaju istu raspodelu datu sa $P(X_n = 1) = p$ i $P(X_n = -1) = q$ za $0 < p < 1, q = 1 - p$. Posmatrajmo slučajne promenljive $S_n := \sum_{j=1}^{n} X_n,\ n \geq 1$.

   (a) Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Y_i := \left(\frac{q}{p}\right)^{X_i}$, $i \in \mathbb{N}$.

   (b) Dokazati da je niz slučajnih promenljivih

   $$M_n := \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$$

   martingal u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}_n = \sigma(X_j, 1 \leq j \leq n),\ n \geq 1$. Sa $\sigma(X_j, 1 \leq j \leq n),\ n \geq 1$ je označena σ-algebra generisana slučajnim promenljivama $X_j, 1 \leq j \leq n$.

Rešenje: Primetimo da je

$$M_n := \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} = \left(\frac{q}{p}\right)^{X_1} \cdots \left(\frac{q}{p}\right)^{X_n}.$$

Slučajna promenljiva $Y_i := \left(\frac{q}{p}\right)^{X_i},\ 1 \leq i \leq n$ ima raspodelu $P(Y_i = \frac{q}{p}) = p$ i $P(Y_i = \frac{p}{q}) = q$. Dakle, $E(|Y_i|) = E(Y_i) = 1 < \infty$, a pošto su Y_i nezavisne, sledi da je i $E(|M_n|) < \infty$, pa je prvi uslov iz definicije martingala zadovoljen.

Kako su slučajne promenljive S_n merljive u odnosu na $\mathcal{F}_n$, sledi da je i drugi uslov iz definicije zadovoljen.

Dalje je

$$E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} E(\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}}|\mathcal{F}_n) = M_n \cdot 1 = M_n,$$

pa je i treći uslov zadovoljen.