Glava 1

Parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda

1.1 Oznake

Za funkciju $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ parcijalni izvod po x_i označavamo sa u_{x_i}, odnosno $u_{x_i} = \partial u / \partial x_i$, pri čemu je $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Radi efikasnosti prilikom rada sa izvodima višeg reda koristimo **multi - indekse**. Multi - indeks je vektor $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, gde $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$. **Red multi - indeksa** je broj $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Za dati multi - indeks α definišemo

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

Dalje uvodimo $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ za $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$.

Za $k \in \mathbb{N}_0^n$ definišemo

$$D^k u = \{\partial^\alpha u : |\alpha| = k\}.$$

Primer 1.1.1 *Ako je $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ i $\alpha = (1, 0, 2)$, onda je $x^\alpha = x_1 x_3^2$, $\alpha! = 1!0!2! = 2$, $|\alpha| = 1 + 0 + 2 = 3$, $\partial^\alpha u = u_{x_1} u_{x_3 x_3}$.*

Za funkciju $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je $D^1 u = \{u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}\}$.

Za multi - indekse α i β definišemo i

$$\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!},$$

pri čemu je $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \ldots, \alpha_n \pm \beta_n)$.

Za multi - indekse α i β važi da je $\alpha \leq \beta$ ako i samo ako je $\alpha_i \leq \beta_i$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Zadatak 1.1.2 *Dokazati: ako su φ i ψ funkcije definisane u okolini tačke $x \in \mathbb{R}^n$ i čiji parcijalni izvodi reda $\leq |p|$ za multi - indeks $p \in \mathbb{N}_0^n$ postoje i neprekdini su u toj okolini, onda važi*

$$\partial^p(\varphi\psi) = \sum_{q \leq p} \binom{p}{q} \partial^q \varphi \partial^{p-q} \psi.$$

Podsetimo se i definicija gradijenta i Laplasijana skalarne funkcije $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

- Gradijent funkcije u je vektor $\nabla u = \text{grad } u = (\partial_1 u, \ldots, \partial_n u)$.
- Laplasijan funkcije u je linearan operator $\Delta u = \partial_{11} u + \cdots + \partial_{nn} u$

Za vektorsko polje $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definišemo divergenciju sa

$$\text{div } F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

Za vektorsko polje $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definišemo rotor sa

$$\text{rot } F = \nabla \times F = (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \times (F_1, F_2, F_3)$$

1.2 Definicija i klasifikacija

Definicija 1.2.1 *Parcijalna diferencijalna jednačina (skraćeno PDJ) reda k je jednačina koja može da se zapiše u obliku*

$$F(x, u, Du, D^2u, \ldots, D^k u) = 0,$$

za neku funkciju $F : U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n^2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n^k} \to \mathbb{R}$, gde je $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup, a $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je nepoznata funkcija.

Primer 1.2.2
- *$u_t + u_x = 0$ je jednačina prvog reda*
- *$u_t + u_{xxx} + u = x$ je jednačina trećeg reda*
- *$u_x^2 + u_y^2 = 1$ je jednačina prvog reda*

Definicija 1.2.3 *PDJ reda k je* **linearna** *ako može da se zapiše u obliku*

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u = f(x).$$

Ako je $f = 0$ kažemo da je jednačina homogena, ako je $f \neq 0$ kažemo da je nehomogena. Ako jednačina nije linearna, kažemo da je **nelinearna**.

Primer 1.2.4
- *$u_{xx} + u_{yy} = 0$ je homogena linearna jednačina*

- $u_{xx} + u_{yy} = e^x$ *je nehomogena linearna jednačina*
- $u_x^2 + u_y^2 = 1$ *nije linearna jednačina*

Definicija 1.2.5 *Nelinearna PDJ reda k je* **semilinearna** *ako može da se zapiše u obliku*

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\partial^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, D^{k-2}u, \ldots, Du, u, x) = 0$$

Dakle, nelinearne PDJ su semilinearne ako koeficijenti uz najviše izvode od u zavise isključivo od x.

Primer 1.2.6

- $u_{tx} + u^2 = 0$ *je semilinearna jednačina*
- $u_t + u_{xxx} + uu_{xx} = 0$ *je takođe semilinearna*

Definicija 1.2.7 *Nelinearna PDJ reda k, koja nije semilinearna, je* **kvazilinearna** *ako može da se zapiše u obliku*

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, D^{k-2}u, \ldots, Du, u, x)\partial^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, D^{k-2}u, \ldots, Du, u, x) = 0$$

Primer 1.2.8

- $u_t + f(u)u_x = 0$ *je kvazilinearna jednačina*
- $\operatorname{div}\Big(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\Big) = 0$ *(jednačina minimalne površi) je kvazilinearna jednačina*

Definicija 1.2.9 *PDJ reda k je* **potpuno nelinearna** *ako se izvodi najvišeg reda pojavljuju nelinearno u jednačini*

Primer 1.2.10

- $u_x^2 + u_y^2 = 1$ *je potpuno nelinearna jednačina*

Zadatak 1.2.11 *Klasifikovati sledeće jednačine:*

1. $u_t + u_x + \sin u = 0$;
2. $u_t + u_x + \sin x^3 = 0$;
3. $u_t + u_x + \sin u_x = 0$;
4. $u_t + e^u u_x = \sin x^2$.

Zadatak 1.2.12 *Rešiti jednačinu* $u_{xx} + u = 0, u = u(x, y)$.

Zadatak 1.2.13 *Rešiti jednačinu* $u_{xy} = 0, u = u(x, y)$.

Zadatak 1.2.14 *Rešiti jednačinu* $u_{xy} + 3u_y = 0, u = u(x, y)$.

1.3 Linearne jednačine prvog reda

Posmatramo jednačine oblika

$$a_1(x)u_{x_1} + a_2(x)u_{x_2} + \cdots + a_n(x)u_{x_n} + a_0(x)u = f(x).$$

Zadatak 1.3.1 *Rešiti jednačinu* $au_x + bu_y = 0, a^2 + b^2 \neq 0,\ a, b \in \mathbb{R}$.

Rešenje: Primetimo da je izvod u pravcu (a, b) funkcije u jednak nuli. Dakle, $u(x, y) = c$ u pravcu vektora (a, b). Rešenje je konstantno na svakoj pravoj paralelnoj sa (a, b), pa je $u(x, y) = f(bx - ay)$, gde je f proizvoljna diferencijabilna funkcija jedne promenljive.

Drugi način da se reši zadatak je da se uvede smena promenljivih, $x_1 = ax + by, \quad y_1 = bx - ay$. Tada je $u_x = u_{x_1}\partial_x x_1 + u_{y_1}\partial_x y_1 = au_{x_1} + bu_{y_1}$. Slično je $u_y = -au_{y_1} + bu_{x_1}$. Sledi da je $au_x + bu_y = (a^2 + b^2)u_{x_1} = 0$, pa je $u = f(y_1) = f(bx - ay)$ i f je proizvoljna, diferencijabilna funkcija. ❑

Zadatak 1.3.2 *Rešiti jednačinu* $4u_x - 3u_y = 0,\ u(0, y) = y^3$.

Rešenje: Rešenje je dato sa $u(x, y) = \dfrac{(3x + 4y)^3}{64}$.

Zadatak 1.3.3 *Rešiti jednačinu* $3u_x - 5u_y = 0,\ u(0, y) = \sin y$.

1.3.1 Jednačine oblika $au_x + bu_y + cu = g(x, y),\ a, b, c \in \mathbb{R}$

Da bismo našli opšte rešenje ove jednačine, tražimo opšte rešenje homogene jednačine $au_x + bu_y + cu = 0$ i partikularno rešenje nehomogene jednačine. Rešenje dobijamo kao zbir ova dva rešenja. Uvodimo smenu promenljivih $x_1 = ax + by, \quad y_1 = bx - ay$, pa jednačina postaje $(a^2 + b^2)u_{x_1} + cu = 0,\ u = u(x_1, y_1)$. Dalje ovu jednačinu rešavamo kao običnu diferencijalnu jednačinu, pa dobijamo $u(x_1, y_1) = e^{\frac{-c}{a^2+b^2}x_1} f(y_1)$. Dakle, rešenje homogene jednačine je $u_h(x, y) = e^{\frac{-c}{a^2+b^2}(ax+by)} f(bx - ay)$. Da bismo našli partikularno rešenje, posmatramo jednačinu $(a^2 + b^2)u_{x_1} + cu = g(x_1, y_1)$ i rešavamo je kao nehomogenu običnu diferencijalnu jednačinu. Partikularno rešenje je $u_p = e^{\frac{-c}{a^2+b^2}x_1} \int \dfrac{g(x_1, y_1)}{a^2 + b^2} e^{\frac{c}{a^2+b^2}x_1} dx_1$. Opšte rešenje polazne jednačine je $u = u_h + u_p$.

Zadatak 1.3.4 *Naći opšte rešenje jednačine* $-2u_x + 4u_y + 5u = e^{x+3y}$.

Zadatak 1.3.5 *Rešiti početni problem* $u_x + u_y + u = e^{x+2y},\ u(x, 0) = 0$.

1.3.2 Jednačine oblika $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y)$

Zadatak 1.3.6 *Rešiti jednačinu* $u_x + yu_y = 0$.

Rešenje: Izvod u pravcu $v = (1, y)$ je nula. Krive za koje je vektor v tangentni vektor imaju nagib $y/1$, pa važi $dy/dx = y/1$. Rešavanjem ove obične diferencijalne jednačine dobijamo $y = ce^x$, tj. $e^{-x}y = C$. Na svakoj od ovih krivih rešenje je konstantno. Zaista, važi da je $\frac{d}{dx}u(x, Ce^x) = u_x + yu_y = 0$. Dakle, rešenje je dato sa $u(x,y) = f(c) = f(e^{-x}y)$, gde je f proizvoljna C^1 funkcija. ❑

Zadatak 1.3.7 *Rešiti početni problem* $u_x + yu_y = 0, u(0,y) = y^3$.

Rešenje: Rešenje je dato sa $u(x,y) = (e^{-x}y)^3$. ❑

Da bismo rešili jednačinu $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y)$, slično kao i ranije uvodimo smenu $\xi = \xi(x,y)$ i $\eta = \eta(x,y)$. Tada je $u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$ i $u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$. Polazna jednačina je sada u obliku $(a\xi_x + b\xi_y)u_\xi + (a\eta_x + b\eta_y)u_\eta + cu = d$. Želimo da dobijemo običnu diferencijalnu jednačinu, recimo po ξ, pa biramo η tako da je $a\eta_x + b\eta_y = 0$ i bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $a \neq 0$. Za krive $y(x)$ date sa $dy/dx = b/a$ imamo da je $\frac{d}{dx}\eta(x, y(x)) = 0$, pa je opšte rešenje jednačine $a\eta_x + b\eta_y = 0$ dato sa $\eta(x,y) = f(c)$ i važi da je $\eta_y \neq 0$. Za drugu promenljivu biramo $\xi(x,y) = x$, zato što takav izbor implicira da je Jakobijeva determinanta za transformaciju koordinata različita od nule ($J = \xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y \neq 0$). U novim koordinatama jednačina postaje $a(\xi,\eta)u_\xi + c(\xi,\eta)u = d(\xi,\eta)$, pa ovu jednačinu rešavamo kao običnu diferencijalnu jednačinu po ξ.

Zadatak 1.3.8 *Rešiti jednačinu* $xu_x - yu_y + y^2u = y^2$.

Zadatak 1.3.9 *Rešiti jednačinu* $u_x + 2xy^2u_y = 0$.

Generalno, homogenu, linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$P_1(x)u_{x_1} + \cdots + P_n(x)u_{x_n} = 0,\ x = (x_1, \ldots, x_n)$$

rešavamo preko sistema običnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx_1}{P_1(x)} = \frac{dx_2}{P_2(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n(x)}.$$

Dobijamo $c_1, \ldots, c_{n-1}$, pa je rešenje dato sa $u(x_1, \ldots, x_n) = F(c_1, \ldots, c_{n-1})$, gde je F proizvoljna C^1 funkcija.

Zadatak 1.3.10 *Rešiti jednačinu* $x_1u_{x_1} + x_2u_{x_2} + \cdots + x_nu_{x_n} = 0$.

1.4 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda

Posmatramo jednačine oblika

$$P_1(x,u)u_{x_1} + P_2(x,u)u_{x_2} + \cdots + P_n(x,u)u_{x_n} = Q(x,u).$$

Da bismo došli do rešenja prvo treba da rešimo sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx_1}{P_1(x,u)} = \frac{dx_2}{P_2(x,u)} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n(x,u)} = \frac{du}{Q(x,u)}.$$

Rešenje je u obliku $F(c_1,\ldots,c_n) = 0$, gde je $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$

Zadatak 1.4.1 *Rešiti jednačinu* $x_1u_{x_1} + x_2u_{x_2} + \cdots + x_nu_{x_n} = u$.

Zadatak 1.4.2 *Rešiti jednačinu* $(1+\sqrt{u-x-y})u_x + u_y = 2, u(0,y) = y$.

Zadatak 1.4.3 *Rešiti jednačinu* $x_1u_{x_1} + x_2u_{x_2} + \cdots + x_nu_{x_n} = x_1x_2\ldots x_n$.

Zadatak 1.4.4 *Rešiti jednačinu* $(y+2z^2)z_x - 2x^2zz_y = x^2$. *Naći rešenje koje prolazi kroz krivu* $x = z, y = x^2$.

Zadatak 1.4.5 *Rešiti jednačinu* $xy^3z_x + x^2z^2z_y = y^3z$. *Naći rešenje koje prolazi kroz krivu* $x = -z^3, y = z^2$.

Zadatak 1.4.6 *Rešiti jednačinu* $(y-z)z_x + (z-x)z_y = x - y$.

Zadatak 1.4.7 *Rešiti jednačinu* $yz_x - xz_y = 0,\ z(0,y) = y^2$.

Zadatak 1.4.8 *Rešiti jednačinu* $xu_x + yu_y = 0, u(x,1) = x$.

Zadatak 1.4.9 *Rešiti jednačinu* $u_x + (2e^x - y)u_y = 0$.

Zadatak 1.4.10 *Rešiti jednačinu* $x_1u_{x_1} + x_2u_{x_2} + x_1x_2u_{x_3} = 0,\ u(x_1,x_2,0) = x_1^2 + x_2^2$.

1.5 Fafove jednačine

Fafova jednačina u $\mathbb{R}^3$ je jednačina oblika

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0.$$

Ako je $P(Q_z - R_y) + Q(R_x - P_z) + R(P_y - Q_x) = 0$, tj. ako je $\langle F, rot(F)\rangle = 0$, onda je rešenje u nekoj okolini tačke (x_0,y_0,z_0) u kojoj je $R(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ dato sa $z = \varphi(x,y)$. Sa F smo označili vektorsko polje (P,Q,R).

Moguća su dva slučaja.

1. Ako je $rotF = 0$, tj.ako je $R_y = Q_z, R_x = P_z, P_y = Q_x$, onda je

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x_1,y,z)dx_1 + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y_1,z)dy_1 + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z_1)dz_1 + c,$$

gde su x_0, y_0, z_0 proizvoljni brojevi.

2. Ako je $\langle F, rot(F)\rangle = 0$, onda biramo da je x, y ili z konstanta, npr. neka je $dz = 0$. Tada rešavamo običnu diferencijalnu jednačinu $Pdx + Qdy = 0$ i dobijamo rešenje u obliku $u^p = f(x,y,z) - c(z) = 0$. Tada je $du^p = u_x^p dx + u_y^p dy + u_z^p dz = 0$ i važi da je

$$\frac{u_x^p}{P} = \frac{u_y^p}{Q} = \frac{u_z^p}{R}.$$

Iz ovih relacija dobijamo $c(z)$.

Zadatak 1.5.1 *Rešiti jednačinu* $(6x + yz)dx + (xz - 2y)dy + (xy - 2z)dz = 0.$

Zadatak 1.5.2 *Rešiti jednačinu* $yzdx + (xz - yz^3)dy - 2xydz = 0.$

1.6 Kompletno, opšte i singularno rešenje parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda

Data je parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda

$$F(x,y,z,p,q) = 0, \tag{1.1}$$

gde je $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ i $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Za rešenje koje zavisi od dve proizvoljne, nezavisne konstante a i b kažemo da je **kompletno rešenje**, odnosno $h(x,y,z,a,b) = 0$ ili eksplicitno

$$z = V(x,y,a,b). \tag{1.2}$$

Primetimo da iz (1.1) sledi da je

$$\partial V/\partial x = p,\ \partial V/\partial y = q. \tag{1.3}$$

Sva ostala rešenja jednačine (1.1), ako postoje, mogu se dobiti iz kompletnog rešenja (1.2), što se može pokazati metodom varijacije konstanti.

Neka su $a(x,y)$ i $b(x,y)$ neke diferencijabilne funkcije u kompletnom rešenju $z = V(x,y,a,b)$. Tada je

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} = q. \tag{1.4}$$

Eliminacijom funkcija a i b iz jednačina (1.4) i iz (1.1) treba da se dobije jednačina (1.1), što je moguće ako je

$$\frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}=0. \tag{1.5}$$

Tada formalno jednačine (1.4) postaju oblika (1.3). U zavisnosti od Jakobijana imamo dva slučaja.

1. Ako je Jakobijan jednak nuli, odnosno ako je $\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y}-\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x}=0$, onda je, recimo, $b=\psi(a)$, gde je ψ proizvoljna funkcija u C^1. Pretpostavimo da je $\frac{\partial a}{\partial x}\neq 0$. Važi da je

$$\frac{\partial b}{\partial x}=\psi'(a)\frac{\partial a}{\partial x}.$$

Iz (1.5) sledi da je

$$\Big(\frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial b}\psi'(a)\Big)\frac{\partial a}{\partial x}=0,$$

pa je

$$\frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial b}\psi'(a)=0. \tag{1.6}$$

Eliminacijom a i b iz (1.2), (1.6)i uz uslov da je $b=\psi(a)$ dobijamo relaciju $\eta(x,y,z)=0$ koja ne sadrži a i b i rešenje je jednačine (1.1). Skup rešenja ovog oblika, pri čemu je ψ proizvoljna funkcija zove se **opšte rešenje**.

2. Ako je $\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y}-\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x}\neq 0$, onda jednačine (1.5) imaju samo trivijalna rešenja, odnosno važi da je

$$\frac{\partial V}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial V}{\partial b}=0. \tag{1.7}$$

Eliminacijom a i b iz (1.2) i (1.7) dobija se relacija $f(x,y,z)=0$ koja ne sadrži proizvoljne konstante i koja je rešenje jednačine (1.1). Ovo rešenje se zove **singularno rešenje**.

1.7 Lagranž - Šarpijeva metoda

Posmatramo problem u obliku

$$\begin{cases} F(x,y,u,u_x,u_y) &= 0 \\ u|_\Gamma &= \phi \end{cases} \tag{1.8}$$

Uvodimo promenljive $p(s) = u_x(x(s), y(s))$ i $q(s) = u_y(x(s), y(s))$. Primetimo da tada jednačina

$$\begin{cases} a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y & = c(x,y,u) \\ u|_\Gamma & = \phi \end{cases} \tag{1.9}$$

može da se zapiše u obliku

$$F(x,y,z,p,q) = a(x,y,z)p + b(x,y,z)q - c(x,y,z) = 0.$$

Karakteristične jednačine

$$\begin{aligned} dx/ds &= a(x,y,z) \\ dy/ds &= b(x,y,z) \\ dz/ds &= c(x,y,z) \end{aligned}$$

sada su u obliku

$$\begin{aligned} dx/ds &= F_p(x,y,z,p,q) \\ dy/ds &= F_q(x,y,z,p,q) \\ dz/ds &= pF_p(x,y,z,p,q) + qF_q(x,y,z,p,q). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Ovo zapažanje biće nam motivacija da definišemo karakteristične jednačine za potpuno nelinearnu jednačinu (1.8). U opštem slučaju sistem (1.10) može biti neodređen, pa treba da nađemo jednačine za $p(s)$ i $q(s)$. Duž krivih $(x(s), y(s))$ definisanih sa (1.10) imamo da je

$$dp/ds = du_x/ds = p_x x'(s) + p_y y'(s) = p_x F_p + p_y F_q$$

i slično

$$dq/ds = q_x F_p + q_y F_q.$$

Sa druge strane, iz jednačine imamo da je

$$F_x = F_x + F_z u_x + F_p u_{xx} + F_q u_{xy} = F_x + F_z p + F_p p_x + F_q p_y = 0.$$

Odavde je

$$p_x F_p + p_y F_q = -F_x - pF_z.$$

Slično, kada F diferenciramo po y dobijamo

$$q_x F_p + q_y F_q = -F_y - qF_z.$$

Odavde definišemo jednačine za dp/ds i dq/ds sa

$$dp/ds = -F_x - pF_z,$$

$$dq/ds = -F_y - qF_z.$$

Karakteristične jednačine za (1.8) definišemo sa

$$\begin{aligned}
dx/ds &= F_p(x,y,z,p,q)\\
dy/ds &= F_q(x,y,z,p,q)\\
dz/ds &= pF_p(x,y,z,p,q) + qF_q(x,y,z,p,q)\\
dp/ds &= -F_x(x,y,z,p,q) - pF_z(x,y,z,p,q)\\
dq/ds &= -F_y(x,y,z,p,q) - qF_z(x,y,z,p,q).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Zadatak 1.7.1 1. *Pokazati da ne postoji rešenje početnog problema*

$$\begin{cases} xu_t + u_x &= 0\\ u(x,0) &= \sin x. \end{cases}$$

2. *Objasniti zašto postoji beskonačno mnogo rešenje za početni problem*

$$\begin{cases} xu_t + u_x &= 0\\ u(x,0) &= \cos x. \end{cases}$$

Zadatak 1.7.2 *Odrediti kompletno, opšte i singularno rešenje jednačine*

$$\left(\frac{z_x(x,y)}{x}\right)^2 + \left(\frac{z_y(x,y)}{y}\right)^2 = \frac{2}{z^2(x,y)},$$

a zatim naći ono rešenje koje prolazi kroz krivu $y = 0$, $z = x - 1$.

Glava 2

Parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda

2.1 Talasna jednačina - Dalamberova formula

Posmatramo Košijev problem:

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t)$$
$$u(x,0) = \Phi(x)$$
$$u_t(x,0) = \Psi(x)$$
$$\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}), \quad \Psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \quad f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

Rešenje je dato preko Dalamberove formule:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\Phi(x+ct) + \Phi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(s)ds + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)dyds$$

Zadatak 2.1.1 *Rešiti sledeće jednačine:*

1. $u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) + xt, \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$

2. $u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \quad u(x,0) = \ln(1+x^2), \quad u_t(x,0) = 4+x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$

3. $u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) + e^{ax}, \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$

4. $u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) + e^{ax}, \quad u(x,0) = \sin(x), \quad u_t(x,0) = 1+x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$

Zadatak 2.1.2 *Neka je $u(x,t)$ rešenje talasne jednačine $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$. Dokazati da su tada rešenja i funkcije:*

1. *$u(x-y,t)$, gde je y parametar,*
2. *$u_x(x,t)$,*
3. *$u(ax,at), a \in \mathbb{R}$.*

Zadatak 2.1.3 *Pokazati da za rešenje Košijevog problema*

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, \quad u(x,0) = \Phi(x), \quad u_t(x,0) = \Psi(x),$$

za $x \in \mathbb{R}$ i $t > 0$ važi:

1. *ako su funkcije Φ i Ψ neparne, onda je $u(0,t) = 0$,*
2. *ako su funkcije Φ i Ψ parne, onda je $u_x(0,t) = 0$.*

Zadatak 2.1.4 *Rešiti početne probleme:*

1. $$\begin{gathered} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, \\ u(x,0) = \Phi(x), \quad u_t(x,0) = \Psi(x) \\ u(0,t) = 0 \\ x > 0, \quad t > 0, \quad c > 0. \end{gathered}$$

2. $$\begin{gathered} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, \\ u(x,0) = \Phi(x), \quad u_t(x,0) = \Psi(x) \\ u_x(0,t) = 0 \\ x > 0, \quad t > 0, \quad c > 0. \end{gathered}$$

Zadatak 2.1.5 *Pokazati da za rešenje Košijevog problema*

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0,$$

za $x \in \mathbb{R}$ i $t > 0$ važi:

1. *ako je f neparna funkcija po x, onda je $u(0,t) = 0$,*
2. *ako je f parna funkcija po x, onda je $u_x(0,t) = 0$.*

Zadatak 2.1.6 *Rešiti početne probleme:*

1.

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0$$
$$u(0,t) = 0$$
$$x > 0, \quad t > 0, \quad c > 0.$$

2.

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0$$
$$u_x(0,t) = 0$$
$$x > 0, \quad t > 0, \quad c > 0.$$

Zadatak 2.1.7 *Rešiti početni problem:*

$$u_{tt}(x,y,t) = c^2(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)),$$
$$u(x,y,0) = f_1(x) + f_2(y),$$
$$u_t(x,y,0) = g_1(x) + g_2(y),$$
$$(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \quad c > 0, \quad f_1, f_2 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}), \quad g_1, g_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}).$$

2.2 Talasna jednačina - Furijeova metoda

- Neka

$$f \in L^2([-l,l]) := \Big\{ f : [-l,l] \to \mathbb{R} \mid \int_{-l}^{l} f^2(x)dx < \infty \Big\}.$$

Tada je:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\Big(\frac{n\pi x}{l}\Big) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\Big(\frac{n\pi x}{l}\Big)$$
$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\Big(\frac{n\pi x}{l}\Big)dx, \quad n = 0, 1, ...$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\Big(\frac{n\pi x}{l}\Big)dx, \quad n = 1, 2, ...$$

- Za $f \in L^2([0,l])$ važi:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\Big(\frac{n\pi x}{l}\Big)$$
$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\Big(\frac{n\pi x}{l}\Big)dx, \quad n = 0, 1, ...$$

- Za $f \in L^2([0,l])$ važi i razvoj:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Zadatak 2.2.1 *Rešiti problem*

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0$$

$$x \in [0,l], \quad t > 0, \quad a > 0.$$

Zadatak 2.2.2 *Rešiti prethodni zadatak za $l = 1, g = 0$ i*

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 1 - x, & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Zadatak 2.2.3 *Rešiti problem*

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),$$

$$u(x,0) = \Phi(x), \quad u_t(x,0) = \Psi(x)$$

$$u(0,t) = h(t), \quad u(l,t) = k(t)$$

$$x \in (0,l), \quad t > 0, \quad c > 0.$$

Zadatak 2.2.4 *Rešiti problem*

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + u(x,t) = 0,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \Phi(x)$$

$$x \in (0,l), \quad t > 0.$$

Zadatak 2.2.5 *Rešiti problem*

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + u(x,t) = f(x,t),$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = t^2,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \Phi(x)$$

$$x \in (0,1), \quad t > 0.$$

Zadatak 2.2.6 *Rešiti problem:*

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),$$
$$u(0,t) = t, \quad u(1,t) = 2,$$
$$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 1,$$
$$x \in (0,1), \quad a, t > 0.$$

Zadatak 2.2.7 *Rešiti problem:*

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) - kx,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = u(x,0) = 0, \quad u_t = V_0$$
$$x \in (0,1), \quad t > 0, \quad V_0 = const.$$

Zadatak 2.2.8 *Rešiti problem:*

$$u_{xx}(x,t) - u_{tt}(x,t) = 10,$$
$$u(0,t) = 2, \quad u_x(1,t) = 0,$$
$$u(x,0) = 2, \quad u_t(x,0) = \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right),$$
$$x \in (0,1), \quad t > 0.$$

2.3 Difuzna jednačina

Posmatramo Košijev problem:

$$u_t(x,t) = k u_{xx}(x,t) + f(x,t)$$
$$u(x,0) = \Phi(x)$$
$$\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad k > 0$$

Rešenje je dato sa:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\Phi(y)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t-s)f(y,s)dyds,$$
$$S(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

Zadatak 2.3.1 *Koristeći prethodnu formulu, dokazati da je rešenje problema*

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t),$$
$$u(x,0) = e^{3x},$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad k > 0$$

dato sa $u(x,t) = e^{3(x+3kt)}$.

Zadatak 2.3.2 *Rešiti problem*

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t),$$
$$u(x,0) = \Phi(x),$$
$$u_x(0,t) = 0,$$
$$x > 0, \quad t > 0, \quad k > 0.$$

Zadatak 2.3.3 *Rešiti problem*

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \Phi(x),$$
$$u(0,t) = 0,$$
$$x > 0, \quad t > 0, \quad k > 0.$$

Zadatak 2.3.4 *Rešiti problem*

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \Phi(x),$$
$$u(0,t) = h(t),$$
$$x > 0, \quad t > 0, \quad k > 0.$$

Zadatak 2.3.5 *Rešiti problem*

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t),$$
$$u(x,0) = \Phi(x),$$
$$u_x(0,t) = h(t),$$
$$x > 0, \quad t > 0, \quad k > 0.$$

Zadatak 2.3.6 *Rešiti problem*

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$$
$$u(x,0) = T_0,$$
$$x \in (0,\pi), \quad t > 0, \quad a > 0, \quad T_0 = const.$$

Zadatak 2.3.7 *Rešiti problem*

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t),$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0,$$
$$u(x,0) = \Phi(x),$$
$$x \in (0,1), \quad t > 0, \quad a > 0.$$

Zadatak 2.3.8 *Rešiti problem*

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t),$$
$$u(0,t) = h(t), \quad u(l,t) = k(t),$$
$$u(x,0) = \Phi(x),$$
$$x \in (0,l), \quad t > 0, \quad a > 0.$$

Zadatak 2.3.9 *Rešiti problem*

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + u(x,t) = 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = \Phi(x),$$
$$x \in (0,l), \quad t > 0.$$

2.4 Klasifikacija parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda

Posmatramo jednačinu

$$au_{xx}(x,y) + 2bu_{xy}(x,y) + cu_{yy}(x,y) = d$$

gde su a, b, c i d funkcije koje zavise od x, y, u, u_x i u_y. Neka je

$$\mathcal{D} = b^2 - ac.$$

Jednačina je:

- eliptična ako je $\mathcal{D} < 0$,
- hiperbolična ako je $\mathcal{D} > 0$,
- parabolična ako je $\mathcal{D} = 0$.

Definišimo

$$\lambda_1 = \frac{b + \sqrt{\mathcal{D}}}{a}, \quad \lambda_2 = \frac{b - \sqrt{\mathcal{D}}}{a}.$$

2.4.1 Svođenje na kanonički oblik

- Eliptična jednačina ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$).

  $y'(x) = \lambda_1 \quad \rightarrow \quad c_1 = w_1(x, y)$.

  Smena $\xi = Re(w_1), \quad \eta = Im(w_1)$.

  Svodi se na kanonički oblik $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$.

- Hiperbolična jednačina ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$).

  $y'(x) = \lambda_1 \quad \rightarrow \quad c_1 = w_1(x, y)$.

  $y'(x) = \lambda_2 \quad \rightarrow \quad c_2 = w_2(x, y)$.

  Smena $\xi = w_1, \quad \eta = w_2$.

  Prvi kanonički oblik: $u_{\xi\eta} = \Phi_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$.

  Nova smena $\theta = \xi + \eta, \quad \tau = \xi - \eta$.

  Drugi kanonički oblik: $u_{\theta\theta} - u_{\tau\tau} = \Phi(\theta, \tau, u, u_\theta, u_\tau)$.

- Parabolična jednačina ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 = \lambda_2$).

  $y'(x) = \lambda_1 \quad \rightarrow \quad c_1 = w_1(x, y)$.

  Smena $\xi = w_1, \quad \eta = x$ ili $\xi = w_1, \quad \eta = y$. Smena se bira tako da determinanta Jakobijana preslikavanja bude različita od nule.

  Svodi se na kanonički oblik $u_{\xi\xi} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ ili $u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$.

Zadatak 2.4.1 *Odrediti tip jednačine i svesti je na kanonički oblik.*

a) $2u_{xx} - 4u_{xy} - 6u_{yy} + u_x = 0$.

b) $4u_{xx} + 12u_{xy} + 9u_{yy} + 2u_x + u = 0$.

c) $u_{xx} + 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x + 3u_y = 0$.

Zadatak 2.4.2 *Odrediti oblasti u xy ravni u kojima je jednačina eliptična, hiperbolična, parabolična.*

a) $(1 + x)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0$.

b) $yu_{xx} - 2u_{xy} + xu_{yy} + 2u_x + u = 0.$

Zadatak 2.4.3 *Rešiti problem*

a)

$$u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} - (3 + \cos^2(x))u_{yy} - \cos(x)u_y = 0,$$
$$u(x, \cos(x)) = \sin(x), \quad u_y(x, \cos(x)) = e^{\frac{x}{2}}.$$

b)

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0,$$
$$u(0, y) = y, \quad u_x(0, y) = 1.$$

Glava 3

Distribucije, slabi izvodi, Furijeova transformacija

Zadatak 3.0.4 *Koja od sledećih preslikavanja definišu distribucije, za $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:*

1) $\langle F, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k)$, **2)** $\langle F, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x)dx$, **3)** $\langle F, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(0)$?

Zadatak 3.0.5 *Dokazati da* $\log|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Zadatak 3.0.6 *Izračunati:*

1. $x \cdot \delta$,
2. $vp(\frac{1}{x}) \cdot x$,
3. $vp(\frac{1}{x}) \cdot (x\delta)$.

Zadatak 3.0.7 *Dokazati:*
1) $x \cdot \delta' = -\delta$, **2)** $f \cdot \delta' = -f'(0) \cdot \delta$,*za* $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$, **3)** $x \cdot \delta^{(n)} = -n\delta^{(n-1)}$.

Zadatak 3.0.8 *Da li je δ regularna distribucija?*

Važe sledeće teoreme.

Teorema 3.0.9 *Ako je $x \cdot T(x) = 0$, $T \in \mathcal{D}'$, onda je $T(x) = c\delta(x)$.*

Teorema 3.0.10 *Ako je $x \cdot T(x) = J(x)$, $T, J \in \mathcal{D}'$, onda je $T(x) = T_0(x) + c\delta(x)$, gde je $T_0(x)$ proizvoljno partikularno rešenje jednačine.*

Zadatak 3.0.11 *Rešiti jednačine u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:* **1)** $x \cdot v'(x) = 0$, **2)** $x \cdot v'(x) = 1$.

Zadatak 3.0.12 *Naći funkciju $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \backslash \mathcal{D}(\mathbb{R})$.*

Zadatak 3.0.13 *Naći distribuciju $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \backslash \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.*

3.1 Furijeova transformacija

Za funkciju $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definišemo Furijeovu transformaciju i inverznu Furijeovu transformaciju sa:

$$\mathcal{F}(f(x))(y) = \hat{f}(y) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot y} dx,$$

$$\mathcal{F}^{-1}(f(y))(x) := \hat{f}(-x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{ix\cdot y} dy.$$

Važe sledeće osobine:

1. $\mathcal{F}(\partial_{x_j} f) = i y_j \mathcal{F}(f)$,
2. $\mathcal{F}(x_j f) = i \partial_{y_j} \mathcal{F}(f)(y)$,
3. $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = f(-x)$,
4. $\mathcal{F}(f \star g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$,
5. $\mathcal{F}(f(x-h))(y) = e^{-ih\cdot y} \mathcal{F}(f)(y), h \in \mathbb{R}^n$,
6. $\mathcal{F}(f(\lambda x))(y) = |\lambda|^{-n} \mathcal{F}(f)\left(\frac{y}{\lambda}\right), \lambda \in \mathbb{C}$.

Zadatak 3.1.1 *Odrediti Furijeovu transformaciju funkcija:* **1)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, **2)** $f(x) = e^{-\lambda|x|}, \lambda > 0$

Zadatak 3.1.2 *Odrediti Furijeovu transformaciju za Hevisajdovu distribuciju $H(x)$, gde je $H(x) = 1$ za $x \geq 0$ i $H(x) = 0$ za $x < 0$.*

Zadatak 3.1.3 *Pokazati da u $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ važi:* **1)** $\mathcal{F}(\delta) = (2\pi)^{-n/2}$, **2)** $\mathcal{F}(1) = (2\pi)^{n/2}\delta$.

Zadatak 3.1.4 *Pokazati da je $\mathcal{F}(\Delta f)(y) = -\|y\|^2 \mathcal{F}(f)$.*

Zadatak 3.1.5 *Rešiti jednačinu $u_t = \Delta u$, $u(0,x) = g(x)$ za $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$ i $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Zadatak 3.1.6 *Rešiti jednačinu $u''(x) - u(x) = \delta'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.*

3.2 Prostori Soboljeva, slabi izvodi

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i neka je $1 \leq p \leq \infty$.

Definicija 3.2.1 *Prostor Soboljeva $W^{1,p}(\Omega)$ je definisan sa*

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \,\middle|\, \begin{array}{l} \exists g_1, \cdots, g_n \in L^p(\Omega) \text{ tako da je} \\ \int_\Omega u \partial\varphi/\partial x_i = -\int_\Omega g_i \varphi, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), 1 \leq i \leq n \end{array} \right\}.$$

Dakle, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ako i samo ako su u i svi njeni slabi parcijalni izvodi elementi prostora L^p. Za $W^{1,2}(\Omega)$ koristimo i oznaku $H^1(\Omega)$. Za $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definišemo $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ i kao u prethodnoj glavi koristimo oznaku $Du = \text{grad} u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$. Primetimo da ova definicija ima smisla, pošto su funkcije g_i jedinstvene skoro svuda. Preciznije, ako su h_i funkcije za koje je ispunjeno da je $\int_\Omega u \partial\varphi/\partial x_i = -\int_\Omega h_i \varphi, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), 1 \leq i \leq n$, onda je $\mathrm{m}\{x \in \Omega : g_i(x) \neq h_i(x)\} = 0, 1 \leq i \leq n$, gde je sa m označena Lebegova mera. Prostor $W^{1,p}(\Omega)$ snabdevamo normom

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

ili ponekad koristimo ekvivalentnu normu za $1 \leq p < \infty$

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \Big(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \Big)^{1/p}.$$

Na prostoru $H^1(\Omega)$ je moguće definisati i skalarni proizvod

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} (u_{x_i}, v_{x_i})_{L^2} = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_{x_i} v_{x_i}.$$

Definicija 3.2.2 *Neka je $1 \leq p < \infty$. Sa $W_0^{1,p}(\Omega)$ označavamo zatvorenje skupa $C_0^1(\Omega)$ u $W^{1,p}(\Omega)$.*

Za $W_0^{1,2}(\Omega)$ koristimo oznaku $H_0^1(\Omega)$. Prostor $W_0^{1,p}(\Omega)$ snabdeven $W^{1,p}$ normom je separabilan, Banahov prostor. Prostor H_0^1 snabdeven H^1 skalarnim proizvodom je Hilbertov prostor.

Napomena 3.2.3 *Prostor $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ je gust u $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ i zato je $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, što u opštem slučaju ne važi za $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega \neq \mathbb{R}^n$.*

Napomena 3.2.4 *Neka $f \in C_0^1(\Omega)$ i definišimo za $\varepsilon > 0$*

$$J_\varepsilon f(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_\Omega \rho\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big) f(y) dy,$$

gde je ρ funkcija čiji nosač je sadržan u $B_1(0)$, tj. u otvorenoj lopti poluprečnika 1 sa centrom u koordinatnom početku i važi da je $\int \rho(x)dx = 1$ i $\rho(x) \geq 0$. Funkcija $J_\varepsilon f$ je molifajer za funkciju f. Pošto $J_\varepsilon f \to f, \varepsilon \to 0$ u $W^{1,p}$ normi i $J_\varepsilon f \in C_0^\infty(\Omega)$, onda je $C_0^\infty(\Omega)$ gust u $W_0^{1,p}(\Omega)$, što znači da smo $W_0^{1,p}(\Omega)$ mogli da definišemo i kao zatvorenje skupa $C_0^\infty(\Omega)$ u $W^{1,p}(\Omega)$.

Zadatak 3.2.5 *Naći maksimalno $m \in \mathbb{N}$ tako da $f(x) = x|x| \in W^m(-1,1)$.*

Zadatak 3.2.6 *Odrediti $a, b \in \mathbb{R}$ za koje funkcija $f(x,y) = |x|^a|y|^b$ pripada prostoru $W^1((-1,1)\times(-1,1))$.*

Zadatak 3.2.7 *Odrediti $a, b \in \mathbb{R}$ za koje funkcija $f(x,y) = |x|^a|y|^b$ pripada prostoru $W^1(B_1(0))$.*